形状微分と物質微分による随伴法を用いた形状最適化

Shape Optimization Using Adjoint Method Based on Material Derivative and Shape Derivative

篠原 主勲*

Kazunori Shinohara

Summary
To obtain maximum-drag profiles on a surface of an object located in unsteady flow, a shape optimization algorithm based on an adjoint method is presented. The adjoint method is based on the Lagrange multiplier method. Using a first variation of the Lagrange function, stationary conditions can be derived. These conditions consist of state equations, adjoint equations, and sensitivity equations with boundary conditions. The sensitivity equations are derived based on the shape derivative and the material derivative. To achieve the optimal shape based on these stationary conditions, a smoothing technique, a constant volume technique, a node relocation technique, the SUPG-PSPG stabilized method, and the GPBi-CG solver are implemented in the shape optimization algorithm. Using this algorithm, under Stokes flow, we can obtain the Pironneau's results in the literature (optimal shape of the rugby ball type). Under unsteady flow, this algorithm can also construct an optimal shape.

キーワード：形状最適化，数値流体，有限要素法，ラグランジュ未定乗数法，変分原理
Keywords : Shape optimization, CFD (Computational Fluid Dynamics), FEM (Finite Element Method), Lagrange multiplier method, Variational principle

1．緒言

宇宙産業において，宇宙空間に物資を輸送するロケットの打ち上げ性能が重要な課題である．様々な観点からその性能を最大化する構造の開発が進められている[1][2]．その研究課題の一つとして，構造物が受ける空気抵抗の問題がある．ロケットを打ち上げる時のロケット構造物の空気抵抗は，ロケット先端部のフェリングの形状に大きく依存する[3]．空気抵抗を低減することで，ロケットの運搬性能が上昇する．また一方で，人工衛星などが地球上に帰還する際もしくは惑星（火星など）に探査機が着陸するためには，構造物を大気圏に再突入しなければならない．地球への大気圏再突入について，構造物の速度は約 30000km/h に達する．大気との摩擦より，構造物の周辺の温度は数万度に達し，地上に到達する前に燃え尽きる可能性がある．そのため大気圏突入後の速度が低下するように，構造物の抗力が最大となるように形状を決めることも重要な課題となっている[4]．

目的関数を満足するように流れ場に置かれた構造物の形状を最適化する研究は，古くは 1971 年の Watson らまでさかのぼる[5]．この時代では，コンピュータの解析を必要としない理論的な定式化が主流であった．評価関数は散逸エネルギーである．散逸エネルギーを

＊ 工学部　総合機械工学科　ロボティクス専攻

最小化することで，抗力の低減を試みた[6]-[8]．これらの研究は，物体表面が連続的な関数で表わされる場合に対して成立する計算手法であった．1980 年代になると，連続関数で表現できない複雑な物体の最適化を目指して，コンピュータの解析技術を駆使した最適化手法が提案され始める．ストークス方程式を用いて，物体を断面積一定の制約条件のもとで，散逸エネルギーの評価関数を最小化する最適形状を構築した[9]-[11]．2000 年代に入ると，計算機性能の向上とともに，比較的高解像度による複雑なメッシュを用いた解析が可能となる．それにともない複雑な形状最適化のアルゴリズムや，そのアルゴリズムを実行する上で，補助的な要素技術などが必要となってきた．また目的関数も多様化し，様々な形状最適化アルゴリズムが提案されている[12]-[17]．

従来の研究において，最適化アルゴリズムでは，そのアルゴリズムによっては，ピロノーの解[6]が導かれないケースがある[18][19]．また圧力を含む表面力を低減するための形状最適化の研究では，流れ場に配置された物体の表面の滑らかさが低下しやすい[20]．最適形状を構築するためには，最適解に到達する手順を具体化するための方法論と，その方法論を用いる過程での様々な数値解析技術（スムージング，メッシュ変形，体積一定の制御，安定化手法，ソルバーなど）が決定的な役割を果たす．

著者は流れ場に置かれた物体を対象に，飛行機翼，タービン翼などの設計に重要となる表面力の最小化形状の構築を目的として，随伴法による形状最適化技術についての問題点や改善策を検討してきた[21]．随伴法とは，ラグランジュ未定乗数法に基づく感度解析手法で，制約条件付きの変分法である．特に，ラグランジュ未定乗数が空間に分布するような分布関数であるとき，随伴変数と呼ばれる．また，ラグランジュ未定乗数法では，制約関数（状態方程式など）と目的関数との足し合わせでラグランジュ関数を構成する．このラグランジュ関数から，ラグランジュ未定乗数の偏微分から導出される状態方程式の停留条件とは，異なる停留条件が導かれる場合がある．この停留条件を，一般に随伴方程式と呼ぶ．このため，随伴法を随伴方程式法などとも呼ぶ．本研究では，この随伴変数法および随伴方程式法を総称して随伴法と呼ぶことにする．

変分法とは，作用 I が停留点を取るとき，実際の運動の状態を仮想的に変化させても作用の値には一次の変化($\delta I=0$)がないことである[22]．随伴法は，この変分法に基づいている．ラグランジュ関数 L より，停留点($\delta L=0$)を求めることで，最適形状を構築していく．

本論文では，評価関数を表面力として，連続系の感度方程式を導出した随伴法を提案する．ラグランジュ関数より，状態方程式，随伴方程式，感度方程式およびそれらの境界条件も含む停留条件を導出した．特に感度方程式の導出にあたっては，Hadamard らによって提案した物質微分および形状微分の概念を用いて，感度方程式の導出を行った[23][24]．これらの方程式に基づいて形状最適化アルゴリズムを開発した．最適化の対象となる開始の試験時間と終了の試験時間の時間幅を取ることで，状態方程式のフェーズで各時間ステップごとに状態変数を保存し，随伴方程式のフェーズで各時間ステップごとに随伴変数を保存していく．それらのデータを用いて，感度方程式より感度を求めていく．その感度を用いて，スムージング，メッシュ変形，体積の制御を用いて，最適形状を構築していく．さらに，高レイノルズ数領域が計算できるように，SUPG-PSPG 安定化手法[25]，その安定化手法の離散式から構築される非対称行列を求めるために必要な GPBi-CG ソルバー[26]からなる複合的な形状最適化アルゴリズムを提案する．このアルゴリズムを用いれば，時間幅での状態変数，随伴変数のデータから，総合的に感度分布を計算し，滑らかな感度分布を構築していくことが可能である．また，形状最適化アルゴリズムに関する周辺の要素技術を取り込むことで，任意の形状から最適形状へとロバストに形状が変形し，評価関数が収束する．

最後に，状態解析，随伴解析，感度解析，メッシュ変形の計算処理を各フェーズに分離した形状最適化アルゴリズムを用いて，本論文のアルゴリズムの有効性を検証するため，従来と同様のピロノーの解が構築されるかどうかを確認する．さらに検証したソルバーを用いて，構造物の抗力を最大化する形状を構築していく．

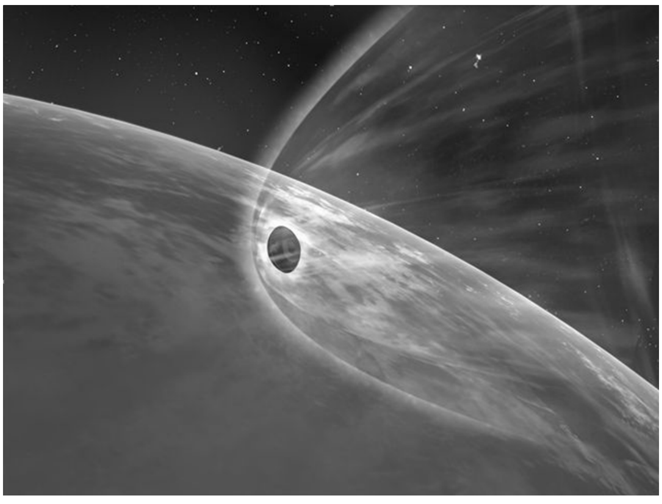


Fig. 1 Re-entry of Hayabusa capsule (JAXA)

2. 計算モデルと定義

図 2 に計算モデルを示す.

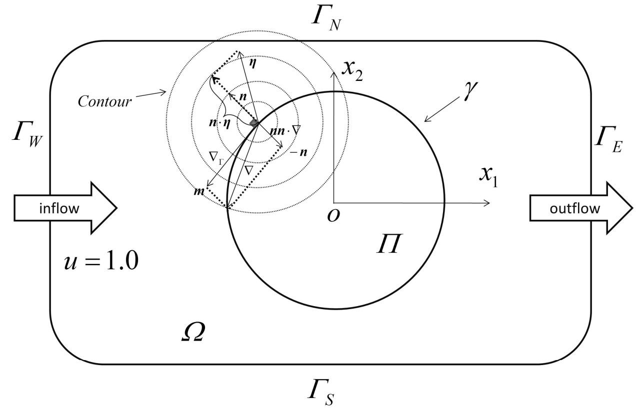


Fig.2 Computational model

２次元の計算領域 Ω 内に，円柱を１つ配置する．領域 Ω を流体で満たす．円柱の表面を境界 γ とする．計算モデルの上部を境界 Γ_N, 下部を境界 Γ_S, 右部を境界 Γ_E, 左部を境界 Γ_W とする．計算領域 Ω の周囲を Ψ とする．境界 Γ を次式で定義する．

$$\Gamma = \Gamma_E + \Gamma_W + \Gamma_S + \Gamma_N + \gamma = \psi + \gamma \tag{2.1}$$

左部の境界 Γ_W を流体の流入口, 右部の境界 Γ_E を流体の流出口とする．また図 2 に示すように円柱内の領域を Π で定義する．次式のように時間を定義する．

$$t \in \mathbf{R}^1 \tag{2.2}$$

境界 Γ 上の単位法線ベクトルを次式のように定義する．

$$\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)^{\mathrm{T}} \quad \in \mathbf{R}^2 \quad \text{on} \quad \Gamma \tag{2.3}$$

境界 Γ 上の単位接線ベクトルを次式のように定義する．

$$\boldsymbol{m} = (m_1, m_2)^{\mathrm{T}} \quad \in \mathbf{R}^2 \quad \text{on} \quad \Gamma \tag{2.4}$$

２次元の空間座標を定義する．

$$^{\varepsilon}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} x_1(\varepsilon) \\ x_2(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad \in \mathbf{R}^2 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{2.5}$$

ε は任意の変数である. $\varepsilon=0$ のとき次式が成り立つものとする.

$$^{0}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x} \quad \in \mathbf{R}^2 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{2.6}$$

すなわち，空間座標が初期の位置に戻る．また円柱の中心位置を座標の原点とする．ベクトル場の一つである速度場を次式で定義する．

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \boldsymbol{\eta}(\varepsilon) \quad \left(\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \\ \dfrac{\partial x_2(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1(\varepsilon) \\ \eta_2(\varepsilon) \end{bmatrix} \right) \quad \in \mathbf{R}^2 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{2.7}$$

速度場 $\boldsymbol{\eta}(\varepsilon)$ **[23][24]**は，空間座標に分布した関数で，初期座標の $\boldsymbol{x}(0)$ と ε をパラメータとする関数である. 数値解析において，$\varepsilon=t$（時間）と考えれば，初期形状から最適形状へ形状が収束する過程で生じるメッシュの変形速度（もしくはメッシュの節点の移動速度）を示す．本研究では，形状の微小変形のみを対象とするため，テイラー展開より，ε についての１次の項のみを考えると次式が導かれる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(\varepsilon) &= \boldsymbol{x}(0) + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{x}(0)}{\partial \varepsilon} = \boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(0) \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + \varepsilon \eta_1(0) \\ x_2 + \varepsilon \eta_2(0) \end{bmatrix} \quad \in \mathbf{R}^2 \quad \text{in} \quad \Omega \end{aligned} \tag{2.8}$$

目的関数を最小化するためのパラメータ，設計変数を次式で表す.

$$\begin{aligned} ^{\varepsilon}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\varepsilon) &= \begin{bmatrix} z_1(\varepsilon) \\ z_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(0) + \varepsilon \dfrac{\partial z_1(0)}{\partial \varepsilon} n_1 \\ z_2(0) + \varepsilon \dfrac{\partial z_2(0)}{\partial \varepsilon} n_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_1(0) + \varepsilon \eta_1(0) n_1 \\ z_2(0) + \varepsilon \eta_2(0) n_2 \end{bmatrix} \quad \in \mathbf{R}^2 \quad \text{on} \quad \gamma \end{aligned} \tag{2.9}$$

本研究の設計変数 $\boldsymbol{z}$ は境界 γ 上の形状外形の座標 $\boldsymbol{x}$ を示す．領域 Ω 上の $\boldsymbol{x}$ と境界 γ 上の $\boldsymbol{x}$ を区別するため，境界 γ 上の $\boldsymbol{x}$ をパラメータ $\boldsymbol{z}$ として定義する. 図 3 に示すように式(2.8)の $\boldsymbol{x}(0)+\varepsilon\boldsymbol{\eta}(0)$ は空間座標に対する摂動をとるため，領域 Ω を固定して，$\boldsymbol{x}(0)$ から $\boldsymbol{x}(0)+\varepsilon\boldsymbol{\eta}(0)$ に

空間座標をスライドさせているにすぎない．そのためこの $\boldsymbol{x}(0)+\varepsilon\boldsymbol{\eta}(0)$ の操作より，領域 Ω，境界 Γ は変化しない．これに対して，設計変数の摂動は，領域 Ω，境界 Γ が変化する．

図3に示すように,形状 γ 上における勾配ベクトルは,接線ベクトルの勾配 ∇_Γ と法線ベクトル $\mathbf{nn}\cdot\nabla$ の勾配の足し合わせで表現できる[23][24].

$$\begin{aligned}\nabla &= \nabla_\Gamma + \boldsymbol{nn}\cdot\nabla = \nabla_\Gamma + \boldsymbol{n}\frac{\partial}{\partial n} \\ &= \nabla_\Gamma + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla) = \nabla_\Gamma + \begin{bmatrix} n_1\left(n_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + n_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right) \\ n_2\left(n_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + n_2\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)\end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2\end{aligned} \tag{2.10}$$

積分領域を変数変換するためのヤコビアンを次式で定義する．

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\boldsymbol{x}(\varepsilon) &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1(\varepsilon)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_1(\varepsilon)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial x_2(\varepsilon)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_2(\varepsilon)}{\partial x_2}\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+\varepsilon\dfrac{\partial \eta_1(0)}{\partial x_1} & \varepsilon\dfrac{\partial \eta_1(0)}{\partial x_2} \\ \varepsilon\dfrac{\partial \eta_2(0)}{\partial x_1} & 1+\varepsilon\dfrac{\partial \eta_2(0)}{\partial x_2}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.11}$$

記号 $div_\Gamma\boldsymbol{\eta}$ を次式で定義する．

$$\mathrm{div}_\Gamma\boldsymbol{\eta} = \mathrm{div}\boldsymbol{\eta} - \mathrm{D}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} \quad \in \mathbf{R}^2 \tag{2.12}$$

流速ベクトルを次式で定義する．

$$\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) = (u_1(t,\boldsymbol{x}), u_2(t,\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}} \quad \in \mathbf{R}^2 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{2.13}$$

状態変数を以下に示す．

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(t,\mathbf{x}) &= (w_1(t,\mathbf{x}), w_2(t,\mathbf{x}), w_3(t,\mathbf{x}))^T \\ &= (p(t,\mathbf{x}), u_1(t,\mathbf{x}), u_2(t,\mathbf{x}))^T \quad \in \mathbf{R}^3 \quad in \quad \Omega\end{aligned} \tag{2.14}$$

変数 p は圧力を示す．時間と空間座標に依存する随伴変数を以下に定義する．

$$\boldsymbol{\lambda}(t,\mathbf{x}) = (\lambda_1(t,\mathbf{x}), \lambda_2(t,\mathbf{x}), \lambda_3(t,\mathbf{x}))^T \quad \in \mathbf{R}^3 \quad in \quad \Omega \tag{2.15}$$

変数 λ_1 は随伴圧力，変数 λ_2 および λ_3 は随伴流速を示す．関数 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(t,\boldsymbol{x}))$ は連続の式 $f_1(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(t,\boldsymbol{x})$ ，ナビエ・ストークスの式 $f_2(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(t,\boldsymbol{x}))$ と $f_3(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(t,\boldsymbol{x})$ から成る．

$$\begin{aligned}f(t,\boldsymbol{x}) &= (f_1(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(t,\boldsymbol{x})), f_2(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(t,\boldsymbol{x})), f_3(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}(t,\boldsymbol{x})))^{\mathrm{T}} \\ &\in \mathbf{R}^3 \quad \text{in} \quad \Omega\end{aligned} \tag{2.16}$$

上付きの添え字 (n) は時間ステップを示す．下付き添え字の $[i]$, $<m>$, (k) はそれぞれ節点番号，要素番号，形状ステップを示す．形状ステップは初期形状から最適形状への形状の修正回数を示す．例えば，形状ステップ (k) 番目，時間ステップ (n) での節点番号 $[i]$,要素番号 $<m>$ の流速を次式のように表すことにする．

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}_{(k)}^{(n)} = \left(u_{1,(k),[i]}^{(n)} \quad u_{2,(k),[i]}^{(n)}\right) \\ &\quad n,k,i = 0,1,\cdots \quad \in \mathbf{R}^2 \quad in \quad \Omega\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}_{(k)}^{(n)} = \left(u_{1,(k),<m>}^{(n)} \quad u_{2,(k),<m>}^{(n)}\right)^T \\ &\quad n,k,m = 0,1,\cdots \quad \in \mathbf{R}^2 \quad in \quad \Omega\end{aligned} \tag{2.18}$$

本論文の添え字 i,j はダミーインデックスを示す.

$$a_j b_j = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \sum_{j=1}^{2} a_j b_j \tag{2.19}$$

添え字 l はフリーインデックを示す.

$$a_l b_l = \begin{cases} a_1 b_1 & l=1 \\ a_2 b_2 & l=2 \end{cases} \tag{2.20}$$

流体解析時に発生するトラクション T_l を次式で定義する．

$$T_l = -pn_l + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right)n_j \quad l = 1,2 \tag{2.21}$$

随伴解析時に発生する随伴トラクションをS_lで定義する．

$$S_l = \lambda_{l+1} u_j n_j - \lambda_l n_l + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial \lambda_{l+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial \lambda_{j+1}}{\partial x_l}\right) n_j \quad l = 1,2$$

(2.22)

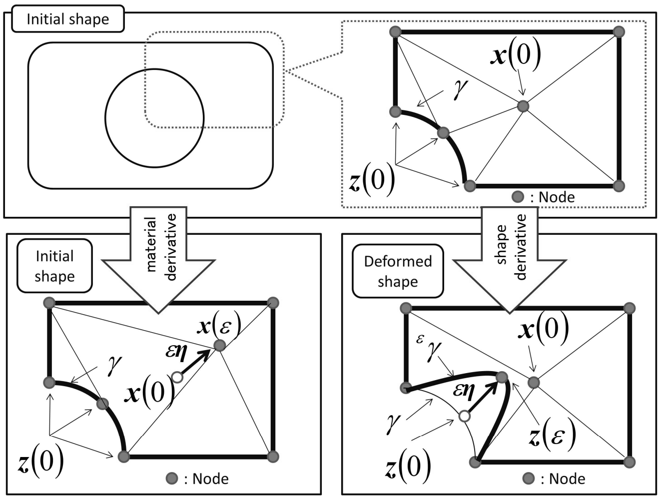


Fig.3 Perturbation with respect to special coordinates and control variable

3. 随伴法

3.1 問題設定

体積一定の制約条件下で，目的関数を最小化するため，随伴変数を導入することでラグランジュ関数を定義する．随伴法は変分原理に基づく方法である．この方法を用いれば，随伴変数と呼ばれるラグランジュ未定乗数を導入することで制約条件下の目的関数の最適化問題を，無制約条件のラグランジュ関数の最適化問題へと置き換えることができる．本研究では，目的関数を形状 γ 上の x_1 方向のトラクションに定義する．

$$J = -\mathrm{c}_1 \int_{t_s}^{t_e}\int_\gamma \left\{ -pn_1 + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) n_1 + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) n_2 \right\} \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}t$$
$$= -\mathrm{c}_1 \int_{t_s}^{t_e}\int_\gamma T_l \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}t \quad \in \mathbf{R}^1$$

(3.1)

変数 t_s and t_e は計算開始の時間と計算終了の時間を示す．C_1は 1.0 以下の定数を示す．のちに述べるが，ナビエ・ストークスなどの制約条件下でラグランジュ関数を最小化していく．C_1 の値を高く設定すると，ラグランジュ関数内の制約条件が目的関数に与える影響を相対的に弱めることなる．C_1 の値を低く設定すると，ラグランジュ関数の制約条件が目的関数に与える影響を相対的に強める．変数 Re はレイノルズ数を示す．

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \mathrm{LU}_1}{\mu} \tag{3.2}$$

定数 L, U_1, ρ と μ はそれぞれ，長さ，代表流速，密度，粘性係数を示す．ラグランジュ関数を以下に定義する．

$$L = J + B + V + F \quad \in \mathbf{R}^1 \tag{3.3}$$

$$F = \int_{t_s}^{t_e}\int_\Omega \lambda_1 f_1 d\Omega \mathrm{d}t + \int_{t_s}^{t_e}\int_\Omega \lambda_2 f_2 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t$$
$$+ \int_{t_s}^{t_e}\int_\Omega \lambda_3 f_3 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \quad \in \mathbf{R}^1 \tag{3.4}$$

$$B = \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma_N+\Gamma_S+\Gamma_E} \lambda_4 T_1 \mathrm{d}(\Gamma_N + \Gamma_S + \Gamma_E)\mathrm{d}t$$
$$+ \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma_N+\Gamma_S+\Gamma_E} \lambda_5 T_2 \mathrm{d}(\Gamma_N + \Gamma_S + \Gamma_E)\mathrm{d}t$$
$$+ \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma_W} \lambda_6 (u_1 - 1)\mathrm{d}\Gamma_W \mathrm{d}t + \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma_W} \lambda_7 u_2 \mathrm{d}\Gamma_W \mathrm{d}t$$
$$+ \int_{t_s}^{t_e}\int_\gamma \lambda_8 u_1 \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}t + \int_{t_s}^{t_e}\int_\gamma \lambda_9 u_2 \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}t \quad \in \mathbf{R}^1 \tag{3.5}$$

$$V = \mathrm{c}_2 \int_{t_s}^{t_e}\int_\Pi \mathrm{d}\Pi \mathrm{d}t \quad \in \mathbf{R}^1 \tag{3.6}$$

F は，支配方程式による制約関数を示す．B は，支配方程式の境界条件に伴う制約関数を示す．変数 λ_4 〜 λ_9 は，随伴変数を示す．図 2 の境界 Γ_N，境界 Γ_S と境界 Γ_w において，λ_4 および λ_5 は， $T_1=0$ および $T_2=0$ の境界条件を課すために導入した随伴変数を示す．境界 Γ_w において，λ_6 および λ_7 は，流体の流入 $u_1=1$ および $u_2=0$ の境界条件を課すために導入した随伴変数を示す．境界 γ において，λ_8 および λ_9 は, *non-slip* 条件 $u_1=0$ および $u_2=0$ を課すために導入した随伴変数を示す．形状を変形するための制御変数は，物体の表面に位置する解析モデルの節点の座標,$\boldsymbol{z}$ である．目的関数(J)は，物体の表面力を示す．式(3.6)の関数(V)は物体の体積を一定とする制約関数を示す．C_2 は係数を示す．係数 C_2 も係数 C_1 と同様に *1.0* 以下の小さな定数である．これらの制約条件のもとで，この目的関数を最小化するように物体の

形状を変形する．

第 1 変分を用いて，停留条件（状態方程式，随伴方程式，感度方程式）を導いていく．本研究では，ナビエ・ストークス方程式を制約条件としてラグランジュ関数を次式のように定義する．

$$
\begin{aligned}
L =& -\mathrm{c}_1\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma} T_1 \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}t + \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \\
&+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_{i+1}\left[-\frac{\partial u_i}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial x_i}-u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}\right]\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \\
&+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma_N+\Gamma_S+\Gamma_E}\lambda_4 T_1 \mathrm{d}(\Gamma_N+\Gamma_S+\Gamma_E)\mathrm{d}t+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma_N+\Gamma_S+\Gamma_E}\lambda_5 T_2 \mathrm{d}(\Gamma_N+\Gamma_S+\Gamma_E)\mathrm{d}t \\
&+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma_W}\lambda_6(u_1-1)\mathrm{d}\Gamma_W \mathrm{d}t+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma_W}\lambda_7 u_2 \mathrm{d}\Gamma_W \mathrm{d}t+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\lambda_8 u_1 \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}t \\
&+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\lambda_9 u_2 \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}t+\mathrm{c}_2\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Pi}\mathrm{d}\Pi \mathrm{d}t \quad (=L_1+L_2+\cdots L_{10}) \quad i,j=1,2 \quad \in \mathbf{R}^1
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

括弧の L_1〜L_{10} は，ラグランジュ関数内の 10 つの項に対応する．

3.2 状態方程式

ラグランジュ関数 L に極値を与える関数を $\lambda_l\ (t,\mathbf{x})$ とする．また任意の関数 η_l を与え，以下で定義されるような微小の係数 ε をパラメータとする比較関数を定義する [22][27].

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_l(\varepsilon,t,x_1,x_2)=\lambda_l(t,x_1,x_2) \\
&+\varepsilon\eta_{l+2}(x_1,x_2) \quad l=1,2,,,9 \quad \text{in} \quad \Omega
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

パラメータ ε が変化することで，λ_l の回りの近傍の全てを Λ_l で表すことになる．式(3.7)の λ_l を Λ_l に置き換えると $L(\lambda_l+\varepsilon\eta_{l+2})$ となる．$L(\lambda_l+\varepsilon\eta_{l+2})$ は，$\varepsilon=0$ のとき，式(3.7)と一致する．すなわち，λ_l が，ラグランジュ関数 L に停留値を与えるならば，$L(\lambda_l+\varepsilon\eta_{l+2})$ の関数は，任意関数 η_l の選び方には関係なく，$\varepsilon=0$ で停留値を取らなければならない．$L(\lambda_l+\varepsilon\eta_{l+2})$ に極値を与える関数 λ_l を求めるためには，微分学で停留値を求める場合と同様に，$L(\lambda_l+\varepsilon\eta_{l+2})$ を ε で微分して，$\varepsilon=0$ と置く．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}L=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{L(\lambda_l+\varepsilon\eta_{l+2})-L(\lambda_l)}{\varepsilon} \\
&=\left[\frac{\partial L(\lambda_l+\varepsilon\eta_{l+2})}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}=0 \quad l=1\text{〜}9
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

上式を汎関数 L の第 1 変分と呼ぶ．また変数 ε と変数 t, $\mathbf{x}$ は互いに独立である．ラグランジュ関数を随伴変数について変分を取り，変分学の基本補題を用いれば，次式が状態方程式であることがわかる．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}L=\left[\frac{\partial L(\lambda_l+\varepsilon\eta_{l+2})}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} \\
&=\left[\frac{\partial J(\lambda_l+\varepsilon\eta_{l+2})}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}+\left[\frac{\partial B(\lambda_l+\varepsilon\eta_{l+2})}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} \\
&+\left[\frac{\partial V(\lambda_l+\varepsilon\eta_{l+2})}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}+\left[\frac{\partial F(\lambda_l+\varepsilon\eta_{l+2})}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} \\
&\quad l=1\text{〜}9
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

上式から，連続の式，ナビエ・ストークス方程式からなる状態方程式および状態方程式の境界条件が導かれる．

$$
\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0\ (=f_1) \quad \text{in} \quad \Omega \tag{3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial x_1}-u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\
&+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right\} \\
&=0\ (=f_2) \quad \text{in} \quad \Omega
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial x_2}-u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\
&+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right\} \\
&=0\ (=f_3) \quad \text{in} \quad \Omega
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

状態方程式の境界条件を表 1 にまとめる．

Table 1. Boundary conditions.

Domains	*State equations*	*Adjoint equations*
Γ_W	$u_1=1, u_2=0$	$\lambda_2=0,\ \lambda_3=0$
$\Gamma_N,\ \Gamma_S,\ \Gamma_E$	$T_1=0,\ T_2=0$	$S_1=0,\ S_2=0$
γ	$u_1=0,\ u_2=0$	$\lambda_2=c_1,\ \lambda_3=0$

3.3 随伴方程式

付録 A より，下記のようにラグランジュ関数を式変形する．

$$
\begin{aligned}
L &= -c_1\int_{t_s}^{t_e}\int_\gamma T_1 \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}t + \int_{t_s}^{t_e}\int_\Omega p\frac{\partial \lambda_{i+1}}{\partial x_i}\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \\
&+ \int_{t_s}^{t_e}\int_\Omega u_i\left\{\frac{\partial \lambda_{i+1}}{\partial t} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \lambda_{j+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda_{i+1}}{\partial x_j}\right)\right\}\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \\
&+ \int_{t_s}^{t_e}\int_\Omega \lambda_{i+1}\left(-u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t + \int_{t_s}^{t_e}\int_\Gamma \lambda_{i+1}T_i \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t \\
&- \int_{t_s}^{t_e}\int_\Gamma u_i\left\{-\lambda_1 u_j n_j + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial \lambda_{j+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda_{i+1}}{\partial x_j}\right)n_j\right\}\mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t \\
&+ \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma_N+\Gamma_S+\Gamma_E} \lambda_4 T_1 d(\Gamma_N + \Gamma_S + \Gamma_E)\mathrm{d}t \\
&+ \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma_N+\Gamma_S+\Gamma_E} \lambda_5 T_2 d(\Gamma_N + \Gamma_S + \Gamma_E)\mathrm{d}t \\
&+ \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma_W} \lambda_6(u_1-1)d\Gamma_W \mathrm{d}t + \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma_W} \lambda_7 u_2 d\Gamma_W \mathrm{d}t \\
&+ \int_{t_s}^{t_e}\int_\gamma \lambda_8 u_1 \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}t + \int_{t_s}^{t_e}\int_\gamma \lambda_9 u_2 \mathrm{d}\gamma \mathrm{d}t \\
&- \int_\Omega \left[\lambda_{i+1}u_i\right]_{t_s}^{t_e}\mathrm{d}\Omega + \mathrm{c}_2\int_{t_s}^{t_e}\int_\Pi \mathrm{d}\Pi \mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

ラグランジュ関数が停留する随伴変数$\boldsymbol{\lambda}$を求める．随伴方程式は，状態変数について変分を取ることで導出される．ラグランジュ関数 L に極値を与える関数を$w_l (l=1〜3)$，比較関数を $W_l\ (l=1〜3)$とし，以下の関数を定義する．

$$
\begin{aligned}
&W_l(\varepsilon,t,x_1,x_2) = w_l(t,x_1,x_2) \\
&+\varepsilon\eta_{l+11}(x_1,x_2) \quad l=1,2,3 \quad \mathrm{in} \quad \Omega
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

式(3.14)と式(3.15)より次式を導く．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}L &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{L(w_l+\varepsilon\eta_{l+11}) - L(w_l)}{\varepsilon} \\
&= \left[\frac{\partial L(w_l+\varepsilon\eta_{l+11})}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \left[\frac{\partial J(w_l+\varepsilon\eta_{l+11})}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} \\
&+ \left[\frac{\partial B(w_l+\varepsilon\eta_{l+11})}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} + \left[\frac{\partial V(w_l+\varepsilon\eta_{l+11})}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} \\
&+ \left[\frac{\partial F(w_l+\varepsilon\eta_{l+11})}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} \qquad l=1,2,3
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

上式より随伴方程式を導く．

$$
\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial x_2} = 0 \quad \mathrm{in} \quad \Omega \tag{3.17}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial \lambda_2}{\partial \tau} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1} + u_1\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_2} - \lambda_2\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \lambda_3\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\
&+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_2}\right)\right\} = 0 \quad in \quad \Omega
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial \lambda_3}{\partial \tau} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_2} + u_1\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_2} - \lambda_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \lambda_3\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\
&+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial x_2}\right)\right\} = 0 \quad in \quad \Omega
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

随伴方程式の境界条件を表 1 に示す．(詳細は付録 B 参照)

3.4　感度方程式

状態方程式の導出では，随伴変数の摂動をとることで第 1 変分を導出することができた．この導出時に，随伴変数は積分領域や被積分関数に影響を与えないため，状態方程式の導出は容易である．このことは随伴方程式でも同様である．感度方程式では，形状γが微小に変形したときに，評価関数（目的関数＋制約条件），すなわちラグランジュ関数に与える影響を求める方程式である．そのため，形状 γ に与えられた空間座標 z を移動する必要がある．

形状の微小変形に対するラグランジュ関数の摂動，すなわち第 1 変分を求めるためには，次の 3 点を考慮する必要がある．

・積分領域（形状のまわりの積分経路γについて，形状を変形すると，それに従って積分経路γが変化する．）
・座標系（圧力，流速などの被積分関数は，空間座標のパラメータである．感度方程式を導出する際に，空間座標に対する第 1 変分をとる．そのため，これらの被積分関数が影響を受ける．）
・形状（初期形状から最適形状へ収束していく際に計算領域が変動する．この変動を考慮した感度方程式の導出が求められる．）

感度方程式を導出するアプローチとして，計算領域を固定したまま，空間座標の摂動のみを取る方法（物質微分）や，空間座標を固定したまま，計算領域の形状γの摂動のみを取る方法（形状微分）が考えられる．本研究は，物体の変化（領域の変動）より，流れの圧力や流速が変化するため，厳密に考えるならば，領域の変動を伴いながら，空間座標について摂動を取る方法が必要である．すなわち下記の第 1 変分を求めることになる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}L &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{L(\boldsymbol{x}(\varepsilon),\boldsymbol{z}(\varepsilon))-L(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{z}(0))}{\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{L(\boldsymbol{x}(0)+\varepsilon\boldsymbol{\eta}(0),\boldsymbol{z}(0)+\varepsilon(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{n})-L(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{z}(0))}{\varepsilon} \quad (3.20)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

本研究では，Hadamard ら[23][24]の理論に基づいて，感度方程式を導出した．感度方程式は 以下となる．（詳細は付録 C 参照）

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \mathrm{c}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}n_2\right)\\
&-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}n_2\right)S_1-\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}n_2\right)S_2 \quad (3.21)\\
&+\lambda_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)-\mathrm{c}_1\frac{\partial p}{\partial x_1}-\mathrm{c}_1\kappa T_1+\mathrm{c}_2
\end{aligned}
$$

$$g_1=\sigma n_1=0 \quad (3.22)$$

$$g_2=\sigma n_2=0 \quad (3.23)$$

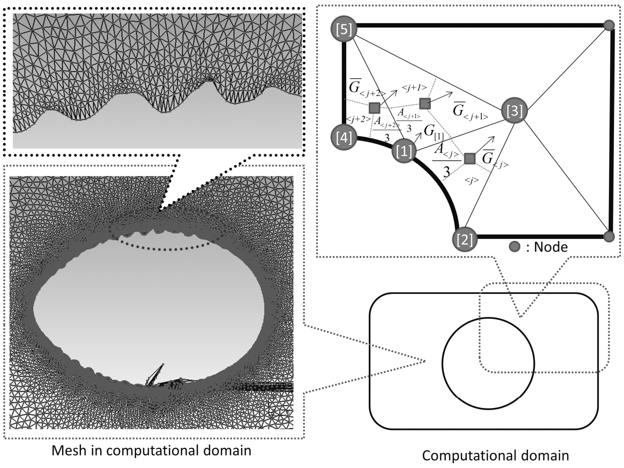


Fig.4 Mesh

4．形状最適化アルゴリズムに必要な要素技術

4.1　スムージング

本論文では，表面に位置するすべての節点を感度に従って移動し，最適形状を構築していく．このアプローチは，メッシュポイントアプローチと呼ばれている[28]．このアプローチを採用すると，比較的，高解像度のメッシュを用いたときに，問題が生じる．表面に位置する節点が移動するにつれて，次第に滑らかな表面が失われ，不規則な表面が生じる[20]．不規則な表面は，流体解析や随伴解析で，部分的に数値振動を引き起こす．場合によってはメッシュの要素が部分的に負の体積を持つようになり，それ以降の計算が実行不可能となることもある．そこで本研究では，物体表面の滑らかさを維持するために，以下に示すスムージングを利用する[29].

$$
\begin{aligned}
&\overline{G}_{<j>,(a)}=\frac{G_{[1],(a)}+G_{[2],(a)}}{2}\\
&\overline{G}_{<j+1>,(a)}=G_{[1],(a)} \qquad\qquad (4.1)\\
&\overline{G}_{<j+2>,(a)}=\frac{G_{[1],(a)}+G_{[4],(a)}}{2}\\
&\quad a=1,2,3,\cdots \quad \text{on} \quad \gamma
\end{aligned}
$$

$$
G_{[1],(a+1)}=\frac{\overline{G}_{<j>,(a)}\dfrac{A_{<j>}}{3}+\overline{G}_{<j+1>,(a)}\dfrac{A_{<j+1>}}{3}+\overline{G}_{<j+2>,(a)}\dfrac{A_{<j+2>}}{3}}{\dfrac{A_{<j>}}{3}+\dfrac{A_{<j+1>}}{3}+\dfrac{A_{<j+2>}}{3}}
$$
$$a=1,2,3,\cdots \quad \text{on} \quad \gamma \qquad (4.2)$$

物体の表面を図 4 に示す．物体の表面に位置する*[i],[k]*は節点番号を示す． $G_{[i]}$は節点*[i]*の移動量を示す．（$G_{[i]}$の求め方については後述） $\overline{G}_{<j>,(a)}$ は要素<*j*>の重心位置での移動量を示す．$l_{<j>}$は要素<*j*>の形状 γ 上に位置する長さを示す．下付の添字*(a)*はスムージングの反復回数を示す．*a+1* を a として，反復的に $G_{[i]}$を更新していく．

4.2　メッシュの節点の再配置

物体の表面に位置する節点のみを，移動していくと，物体の表面付近で負の要素体積が生じる．すなわち，表面の節点を再配置していくと同時に，領域全体の節点も再配置していく必要がある．本研究では，以下に示す重調和方程式を適用した[30].

$$\nabla^4\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{x})=0 \quad \text{in} \quad \Omega \qquad (4.3)$$

$$\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{x})=\beta\cdot G_{(k)} \quad \text{on} \quad \gamma \qquad (4.4)$$

$$\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{x})=0 \quad \text{on} \quad \Gamma_W,\Gamma_N,\Gamma_E,\Gamma_S \qquad (4.5)$$

変数 $\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{x})$は，節点の移動量を示す． $g_{(k)}$は，形状ステップ*(k)*における物体の表面の移動量を示す(後述)．β は係数を示す． $g_{(k)}$の値が大きいと，部分的に負の要素体積

が生じる場合がある．そのため，経験的に小さな値 β を設定する．

4.3 体積一定の制約条件

感度のみによる形状変更では，物体がつぶれるなど非現実的な変形に至る可能性がある．そのため実際には変形に何らかの制約を必要とする．そのため，ラグランジュ関数内に目的関数の制約条件として，体積一定の制約条件 L_{10}(式(3.7))を導入した．しかし数値解析において，この制約条件のみでは，十分に機能しない．そこで，物体の体積一定を満足するように，これから述べる体積一定のアルゴリズムを導入する．形状修正した後に，随伴法とは別の方法で体積一定の制約条件を考慮する．形状の修正による体積の変化 $h(\boldsymbol{x}_{(k)})$を次式で定義する．

$$h_{(k)} = V_{(k)} - V_{(0)} \quad k = 0,1,\cdots \quad \in \mathbf{R}^1 \quad \text{on} \quad \gamma \tag{4.6}$$

ここで $V(\boldsymbol{x}_{(k)})$は，形状ステップ(k)での物体の体積を表す．$h(\boldsymbol{x}_{(k)})$を最小化するように，次式にしたがって物体の表面の外向き(内向き)法線ベクトルに沿って形状を変形する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}_{(k),(j+1)} &= \boldsymbol{z}_{(k),(j)} + \alpha h_{(k),(j)}\,\mathbf{n} \\ j &= 0,1,\cdots \quad \in \mathbf{R}^3 \quad \text{on} \quad \gamma \end{aligned} \tag{4.7}$$

ここで添え字の j は，体積一定の条件の処理で用いる内側反復回数，n は物体表面の法線ベクトルを示す．内側反復 j の変形中では，n は定数である．体積の制御には，メッシュの変形の制御が必要である．メッシュの大変形は，メッシュの要素が部分的につぶれる可能性があるため，実際のプログラムに実装する場合は，1 以下の α を掛けることで変形量を小さくする．まとめると，体積が一定となるように，図 5 のように形状を修正する．まず，随伴法によって得られた感度で形状を変形する．次に，その変形後の体積が初期の体積よりも小さい場合は，物体表面の外向き法線ベクトル n に沿って，式(4.7)により内側反復 j の増加に伴って徐々に体積を増加させていく．逆に変形後の体積が初期の体積よりも大きい場合は，内向き法線ベクトル n に沿って物体を変形する．物体表面の法線ベクトルを定数とし，体積が一定となるまで徐々に変形する．

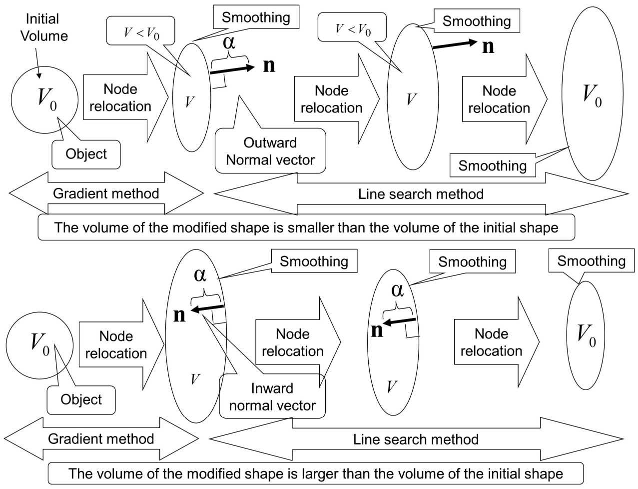


Fig.5 Shape modification with volume held constant

5. 離散化

この章では，感度方程式と勾配法の離散化について述べる．

5.1 感度方程式

本論文の離散化は有限要素法である．感度方程式の計算には，三角形一次有限要素の形状関数を用いる．形状関数を以下に定義する．

$$N_{[i]} = a_{[i]} + b_{[i]}x_1 + c_{[i]}x_2 \tag{5.1}$$

[i]は節点の番号を示す．$a_{[i]},b_{[i]},c_{[i]}$は係数である（係数の求め方は文献[31]を参照のこと）．補間関数を次のように定める．

$$u_{l,<j>} = N_{[1]}u_{l,[1]} + N_{[2]}u_{l,[2]} + N_{[3]}u_{l,[3]} \quad l = 1,2 \tag{5.2}$$

$<m>$は要素番号を示す．[1],[2],[3]は，要素番号$<m>$に対する要素内の節点番号を示す．式(5.2)から偏微分を求めていく．例えば，x_1 に対する u_1 の偏微分を次式で求める．

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)_{<j>} = b_{[1]}u_{1,[1]} + b_{[2]}u_{1,[2]} + b_{[3]}u_{1,[3]} \tag{5.3}$$

式(5.3)は要素番号$<m>$についての値を示す．感度を計算するためには，要素での値から節点での値に変換する必要がある．要素番号$<m>$での偏微分の要素値を，面積に比例して，3 つの節点値にわけていく．例えば，図 4 に示すように，節点[1]が 3 つの要素に結合してい

る場合を考える．*[1],[2]*は表面 γ 上の節点番号を示す．*[3]*は領域 Ω に位置する節点番号を示す．結合情報から表面に位置する 2 節点を取り出すことで, 要素番号<m>における節点[1]での部分的な偏微分の値を求める．その部分的な値を，節点番号[1]の全体的な値に加えていく．

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)_{<j>} \cdot \frac{A_{<j>}}{3} \tag{5.4}$$

$A_{\lt m\gt}$は要素<*m*>での面積を示す. セル面積 $A_{[1]}$などを求めるため，要素<*m*>の面積を 3 つにわける．選択した節点番号[1],[2], [3]に加えていく．すべての表面に位置する要素に対して, 式(5.4)の処理を繰り返す. たとえば, 節点[1]については，次式で節点値が得られる．

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)_{[1]} = \frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)_{<j>}\frac{A_{<j>}}{3} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)_{<j+1>}\frac{A_{<j+1>}}{3} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)_{<j+2>}\frac{A_{<j+2>}}{3}}{\frac{A_{<j>}}{3} + \frac{A_{<j+1>}}{3} + \frac{A_{<j+2>}}{3}} \tag{5.5}$$

同様に他の偏微分についても節点値を求めることができる．勾配 g を求めるために，状態変数，随伴変数の節点値として保存しているデータを利用する．法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ についても，同様の演算処理を適用する．

5.2　勾配法

5.1 節で求めた感度（g_1,g_2）に基づいて，次式に示す勾配法で形状を修正する．

$$\begin{bmatrix} z_{l,(k+1),[1]} \\ z_{l,(k+1),[2]} \\ \vdots \\ z_{l,(k+1),[i]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{l,(k),[1]} \\ z_{l,(k),[2]} \\ \vdots \\ z_{l,(k),[i]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\left(g^{(1)}_{l,(k),[1]} + g^{(2)}_{l,(k),[1]} + \cdots + g^{(n)}_{l,(k),[1]}\right) \\ \beta\left(g^{(1)}_{l,(k),[2]} + g^{(2)}_{l,(k),[2]} + \cdots + g^{(n)}_{l,(k),[2]}\right) \\ \vdots \\ \beta\left(g^{(1)}_{l,(k),[i]} + g^{(2)}_{l,(k),[i]} + \cdots + g^{(n)}_{l,(k),[i]}\right) \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

$$= \begin{bmatrix} z_{l,(k),[1]} \\ z_{l,(k),[2]} \\ \vdots \\ z_{l,(k),[i]} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} G_{l,(k),[1]} \\ G_{l,(k),[2]} \\ \vdots \\ G_{l,(k),[i]} \end{bmatrix} \quad l = 1,2 \quad k = 0,1,\cdots \quad on \quad \gamma$$

上付きの添字*(1)*と*(n)*は，時間ステップを示し，開始の試験時間(t_s)と終了の試験時間(t_e)を示す．大きな移動量は，負の要素体積を生じるため，小さな値 β をかけておく．βG は，構造物の表面の移動量を示す．その表面付近に，負の体積を生じないようにするため，解析領域全体の節点を式（4.3）～式(4.5)で再配置する．

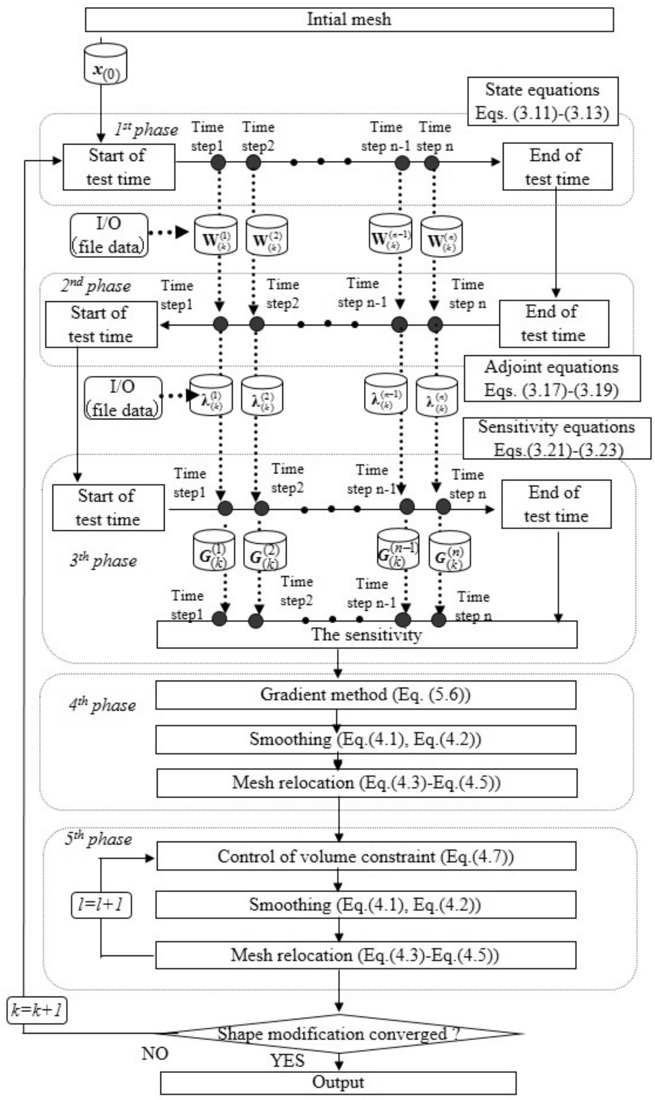


Fig.6 Algorithm

6. 形状最適化アルゴリズム

流体解析，随伴解析を含む形状最適化アルゴリズムを開発した． そのアルゴリズムを図 6 に示す．まず，形状最適化を実行する前に，流れ場が定常状態もしくは準定常状態となるまで計算を進めておき，その状態を開始の試験時刻とする．この状態方式の計算において，SUPG-PSPG の安定化手法を実装した[25]．この安定化手法により，非対称行列を処理するため，GPBi-CG法を適用した[26]．第 1 フェーズでは，状態方程式を開始の試験時刻から，終了の試験時刻への時間方向に解き，状態変数($\boldsymbol{W}$)を求める．このとき，各時間ステップでの $\boldsymbol{W}$ の節点値をファイルに出力する．第 2 フェーズでは，随伴方程式を，終了の試験時刻から開始の試験時刻への時間方向に解き，随伴変数 $\boldsymbol{\lambda}$ を求める．$\boldsymbol{W}$ と同様に各時間ステップでの $\boldsymbol{\lambda}$ の節点値をファイルに出

力する．第３フェーズでは，記憶した $\boldsymbol{W}$ と $\boldsymbol{\lambda}$ を用いて感度方程式より各時間ステップでの感度 $\boldsymbol{G}$ を求め，第4フェーズへ感度の時間積分値を渡す．

第 4 フェーズでは，勾配法を用いることで，まず物体の表面の形状を修正し，メッシュの節点を再配置する．第 5 フェーズでは，物体の体積一定の制約条件を考慮する．最後に，その物体の形状修正が収束した場合は，結果を出力する．そうでない場合は，第１フェーズから繰り返す．

7. 計算結果

本研究では，抗力の最大化を目的とし，最適形状を構築する．最初に，本論文で提案したアルゴリズムを検証するため，目的関数を散逸エネルギーとした場合における低レイノルズ数領域における最適形状（ピロノーの結果）と比較する．次に目的関数をトラクションに設定した場合における形状最適化の計算結果を述べる．

7.1 計算条件

図 7 に解像度(節点数 4157，要素数 8058)の初期形状のメッシュを示す．要素タイプは三角形１次要素である．円柱の直径は，1.0 とした．状態方程式の境界条件は表 1 である．流入口 (境界 Γ_W) の流速は 1.0 である．パラメータ c_1 を 1.0 に設定した．円柱の計算モデルを周方向に約 60 分割した．タイムステップについて，ストークス流れでは 0.01 に，レイノルズ数が 1000 のときは，0.0005 に設定した．

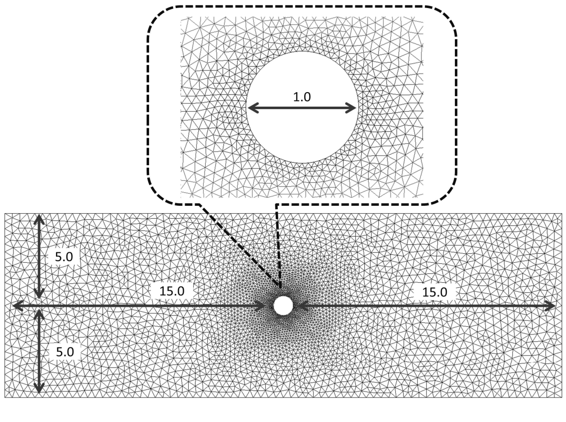


Fig.7 2D Mesh

7.2 低レイノルズ数領域 (RE=0.01) における形状最適化

1973 年にピロノーは目的関数を散逸エネルギーに設定し，形状を最適化した[6]．その目的関数を次式に示す．

$$J=-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\mu\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right\}\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t\quad\in\mathbf{R}^1 \tag{7.1}$$

式(C.19)より，上式の領域変動を伴う空間座標に対する第１変分を求めると次式となる．

$$\begin{aligned}dJ=&-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\mu\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right\}n_1\left(n_1\eta_1+n_2\eta_2\right)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t\\&-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\mu\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right\}n_2\left(n_1\eta_1+n_2\eta_2\right)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t\\&-\kappa\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\mu\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right\}\left(n_1\eta_1+n_2\eta_2\right)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t=0\end{aligned} \tag{7.2}$$

上式の任意の速度場 η_1,η_2 に対して，上式を常に満たすためには，下記となる．

$$\begin{aligned}\sigma=&-\mu\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right\}n_1\\&-\mu\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right\}n_2\\&-\kappa\mu\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right\}\end{aligned} \tag{7.3}$$

$$g_1=\sigma n_1=0 \tag{7.4}$$

$$g_2=\sigma n_2=0 \tag{7.5}$$

上式の勾配 g_1 および g_2 を用いて最急降下法を用いて形状を最適化していく．目的関数が散逸エネルギーの場合では，目的関数内に圧力の項がないため，随伴流を生じる源がない．すなわち λ_1～λ_3 は，常にゼロとなる．そのため，随伴方程式の解を求める必要はない．また制約条件として体積を一定にした．

図 8 に抗力が最小化する最適形状を計算した．図 8 の感度分布は，円柱表面に位置する節点でのベクトルである．このベクトルの方向へ、節点を移動させていくことで，少しづつ，初期形状から最適形状へと構造物の外形が収束していく．ピロノーが計算した最適形状[6]，ラグビーボールのような形が形成されることで

最適形状に収束していることがわかる．低レイノルズ数領域の流れ場（流線および圧力場）は上下左右対称であることがわかる．図 8 の $J_{(k)}/J_{(0)}$は，目的関数，エネルギー散逸率を，初期形状のエネルギー散逸率で正規化した値を示す．約 12%程度の目的関数を低減した．これは文献[9]とほぼ一致する．

図 8 に抗力が最大化する最適形状を計算した．最適形状は，左右対称で，細長い．初期形状の目的関数の値と比較して，最適形状の目的関数は，約 1.33 倍に増加した．

7.3 レイノルズ数領域(RE=100.0)における形状最適化

レイノルズ数領域 100.0 における抗力最小化，抗力最大化の形状を構築する．図 11 に抗力を最小化した場合の計算結果を示す．図に示すように円柱後方にカルマン渦が発生する．初期形状が涙目の形状に変形することで最適形状に収束した. RE=0.01 の最適形状とは異なる形状へと収束することがわかった.

図 12 に抗力を最大化したときの形状を示す．最適形状は,上下対称だが，左右は非対称である．抗力を最大化する最適形状においても, RE=0.01 の最適形状とは異なる形状へと収束することがわかった.

7.4 レイノルズ数領域(RE=1000.0)における形状最適化

乱流領域にあるレイノルズ数領域 1000.0 の抗力最小化,抗力最大化の形状を構築する.安定化項 SUPG-PSPG 項を導入することで，RE1000 の計算を可能している．図 14 の抗力を最小化する形状を示す．初期形状が弾丸形状に収束することで，最適形状に収束した．

図 15 に抗力を最大化したときの計算結果を示す．コーヒーカップのような形状に収束することで最適形状に収束した．

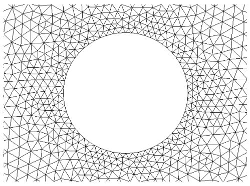
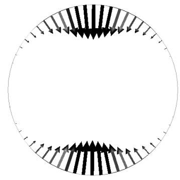
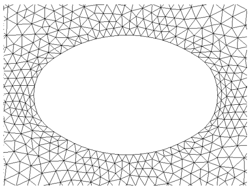
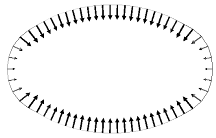
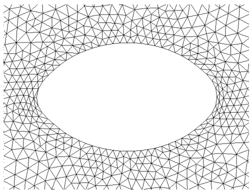
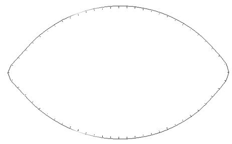
Shape (J(k)/J(0))	Mesh	Sensitivity Distribution
Initial shape (1.0)		
Intermediate shape (0.93)		
Optimal shape (0.88)		

Fig.8 Mesh and sensitivity distribution for drag minimization in Reynolds number 0.01

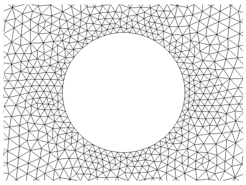
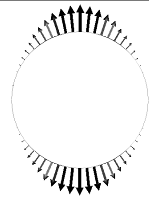
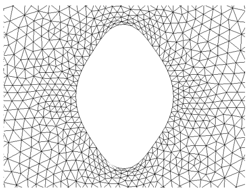
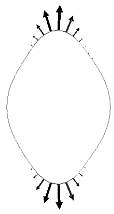
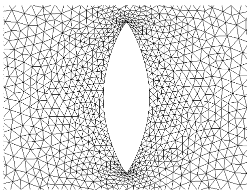
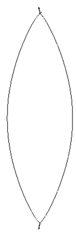
Shape (J(k)/J(0))	Mesh	Sensitivity Distribution
Initial shape (1.0)		
Intermediate shape (1.05)		
Optimal shape (1.33)		

Fig.9 Mesh and sensitivity distribution for drag maximization in Reynolds number 0.01

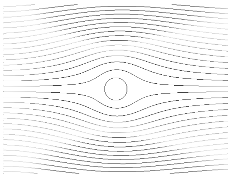
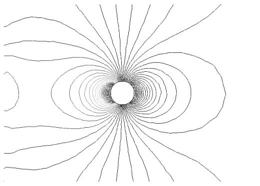
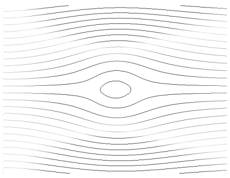
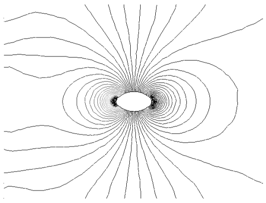
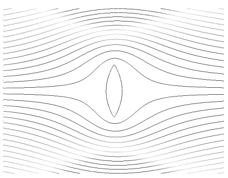
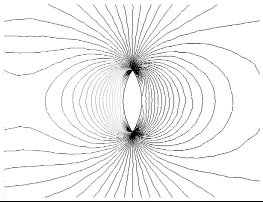
	Flow Field	Pressure Field
Initial shape		
Drag minimization		
Drag maximization		

Fig. 10 Flow field and Pressure filed in Reynolds number 0.01

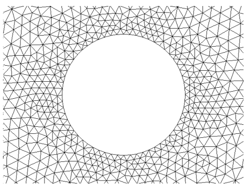
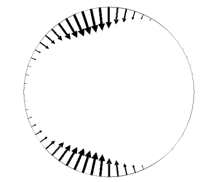
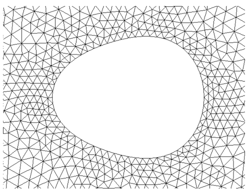
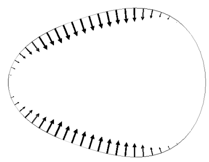
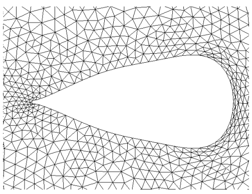
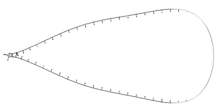
Shape (J(k)/J(0))	Mesh	Sensitivity Distribution
Initial shape (1.00)		
Intermediate shape (0.93)		
Optimal shape (0.59)		

Fig.11 Mesh and sensitivity distribution for drag minimization in Reynolds number 100

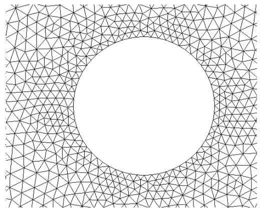
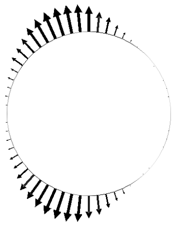
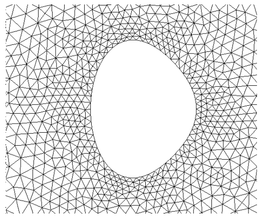
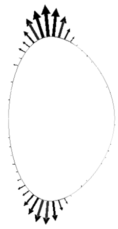
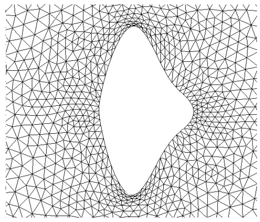
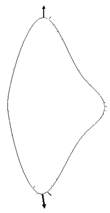
Shape (J(k)/J(0))	Mesh	Sensitivity Distribution
Initial shape (1.00)		
Intermediate shape (1.09)		
Optimal shape (2.82)		

Fig.12 Mesh and sensitivity distribution for drag maximization in Reynolds number 100

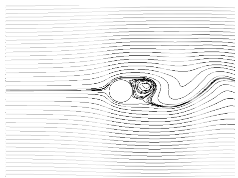
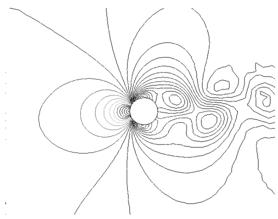
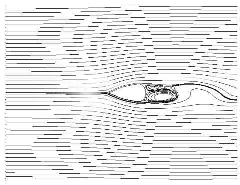
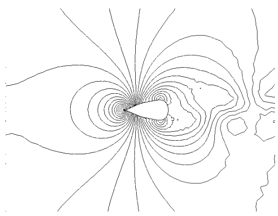
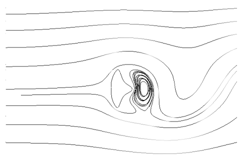
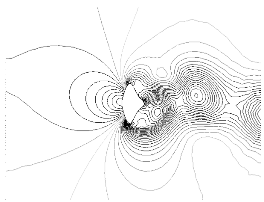
	Flow Field	Pressure Field
Initial shape		
Drag minimization		
Drag maximization		

Fig 13 Flow field and Pressure filed in Reynolds number 100

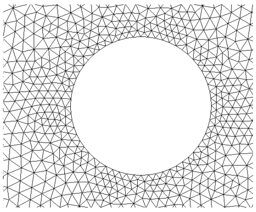
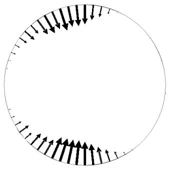
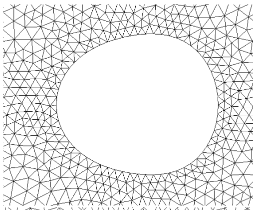
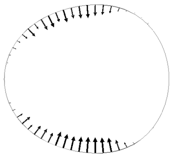
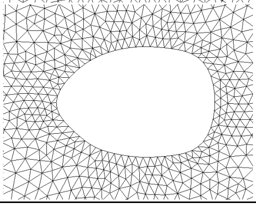
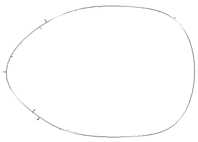
Shape (J(k)/J(0))	Mesh	Sensitivity Distribution
Initial shape (1.00)		
Intermediate shape (0.86)		
Optimal shape (0.56)		

Fig.14 Mesh and sensitivity distribution for drag minimization in Reynolds number 1000

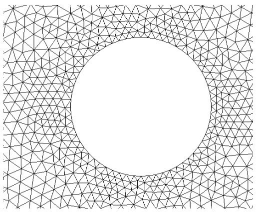
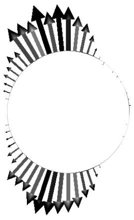
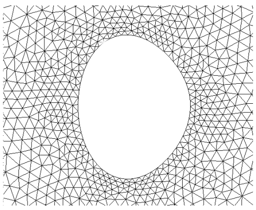
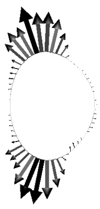
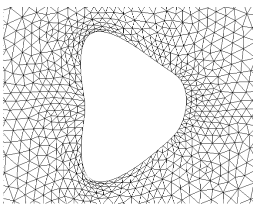
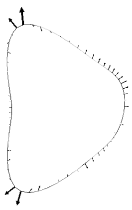
Shape (J(k)/J(0))	Mesh	Sensitivity Distribution
Initial shape (1.00)		
Intermediate shape (1.18)		
Optimal shape (2.18)		

Fig.15 Mesh and sensitivity distribution for drag maximization in Reynolds number 1000

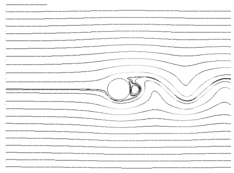
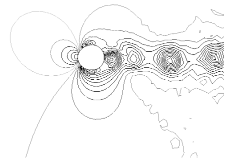
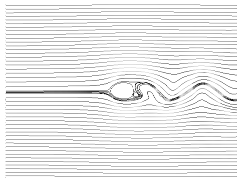
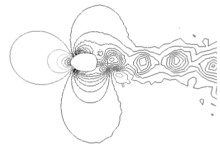
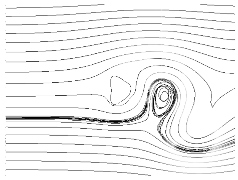
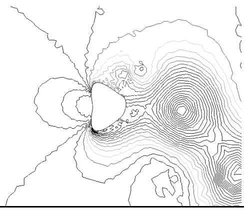
	Flow Field	Pressure Field
Initial shape		
Drag minimization		
Drag maximization		

Fig 16 Flow field and Pressure filed in Reynolds number 1000

8. 結論

流れ場に配置された構造物の表面力を最大化するため，第１変分原理に基づく随伴法より，ラグランジュ関数を定式化し，停留条件を導出した．この手法より以下の結論を得た．

・第１変分より随伴方程式とその境界条件を，ラグランジュ関数より導出した．形状の座標に対する第１変分，すなわち感度方程式を導出するため，形状微分および物質微分を用いた．
・高レイノルズ数領域の流体を計算するため，安定化手法 SUPG,PSPG 法を導入し，非対称行列 GPBi-CG ソルバーを実装した．さらに柔軟に形状が変形できるように，表面のスムージング，重調和関数，体積一定の制約条件を実装した．
・RE0.01 における最適形状，ピロノーの結果と，本研究による計算結果を比較することで，本研究による随伴法の定式化の信頼性を検証した．検証した手法を用いて，非定常流れである RE100，RE1000 の流れ下で計算し，目的関数を低減した．

以上より，形状最適化の基本的なアルゴリズムを提案した．本手法を用いれば，抗力を最小化および抗力を最大化することも可能である．将来的に圧縮性流体

のアルゴリズムに適用することで，実用的な宇宙機器構造物の最適形状を構築していく．

付録

A 随伴方程式の導出のための準備（ラグランジュ関数の式変形）

ガウス・グリーンの定理を用いることで，式(3.14)を誘導する．式(3.7)の右辺の 2 番目の項は次式となる．i,j,k は総和則を用いる．

$$\begin{aligned}&\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_1\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\\&=\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}\lambda_1 u_i n_i\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_i}u_i\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{A.1}$$

式(3.7)の第 3 項の時間微分項を次式のように変形する．

$$\begin{aligned}&\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_{i+1}\left(-\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\\&=-\int_{\Omega}\left[\lambda_{i+1}u_i\right]_{t_s}^{t_e}\mathrm{d}\Omega+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial t}u_i\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{A.2}$$

式(3.7)の第 3 項の圧力項を次式のように変形する．

$$\begin{aligned}&\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_{i+1}\left(-\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\\&=-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}\lambda_{i+1}pn_i\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_i}p\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{A.3}$$

式(3.7)の第 3 項の粘性項を次式のように変形する．

$$\begin{aligned}&\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_{i+1}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}\Omega dt=\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}\lambda_{i+1}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)n_j\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t\\&-\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t=\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}\lambda_{i+1}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)n_j\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t\\&-\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}\left(u_j n_i+u_i n_j\right)\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t+\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}u_j+\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}u_i\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{A.4}$$

上式の第 2 項および第 3 項を次式のように整理する．

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}\left(u_i n_j+u_j n_i\right)\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}u_i n_j+\frac{\partial\lambda_{j+1}}{\partial x_i}u_i n_j\right)\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}+\frac{\partial\lambda_{j+1}}{\partial x_i}\right)u_i n_j\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}u_i+\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}u_j\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}u_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\lambda_{j+1}}{\partial x_i}u_i\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\mathrm{Re}}\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}u_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}+\frac{\partial\lambda_{j+1}}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{A.6}$$

以上をまとめると式(3.14)となる．

B 随伴方程式の導出

ラグランジュ関数 L の状態変数 $\boldsymbol{w}(=(p,u_1,u_2))$ における第 1 変分から，変分学の基本補助定理より方程式が導かれる．その方程式を随伴方程式と呼ぶ．式(3.15)より次式を用いる．

$$W_1(\alpha,t,x_1,x_2)=p(t,x_1,x_2)+\varepsilon\eta_{12}(x_1,x_2)\tag{B.1}$$

L の p における第 1 変分を導くために，関数 η_{12} を導入する．関数 η_{12} は，連続条件をもち，微分可能で，解析領域全体にわたって定義された空間座標をパラメータとする任意関数である．ラグランジュ関数，式(3.14)の右辺第 1 項は次式となる．

$$\begin{aligned}&\left[-\mathrm{c}_1\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}T_1\left(p+\varepsilon\eta_{12}\right)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t\right]_{\varepsilon=0}\\&=\left[-\mathrm{c}_1\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\left\{-\left(p+\varepsilon\eta_{12}\right)n_1+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_1}\right)n_j\right\}\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t\right]_{\varepsilon=0}\end{aligned}\tag{B.2}$$

ここで時間 t, 空間座標 x と変数 ε は互いに独立である．積分 t,γ と微分 ε の順序の交換が可能である．

$$\left[-c_1\int_{t_s}^{t_e}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left\{-(p+\varepsilon\eta_{12})n_1+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_1}\right)n_j\right\}d\gamma dt\right]_{\varepsilon=0}$$
$$=c_1\int_{t_s}^{t_e}\int_\gamma n_1\eta_{12}d\gamma dt; \tag{B.3}$$

ラグランジュ関数，式(3.14)の右辺第2項は次式となる．

$$\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{t_s}^{t_e}\int_\Omega (p+\varepsilon\eta_{12})\frac{\partial\lambda_{k+1}}{\partial x_k}d\Omega dt\right]_{\alpha=0}$$
$$=\left[\int_{t_s}^{t_e}\int_\Omega \frac{\partial\lambda_{k+1}}{\partial x_k}\eta_{12}d\Omega dt\right]_{\alpha=0}=\int_{t_s}^{t_e}\int_\Omega \frac{\partial\lambda_{k+1}}{\partial x_k}\eta_{12}d\Omega dt \tag{B.4}$$

式(3.14)の他の項も同様である．以上より，まとめると次式となる．

$$\left[\frac{\partial L(p+\varepsilon\eta_{12})}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}=\int_{t_s}^{t_e}\int_\gamma \mathrm{c}_1 n_1\eta_{12}\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t$$
$$+\int_{t_s}^{t_e}\int_\Omega \frac{\partial\lambda_{k+1}}{\partial x_k}\eta_{12}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t$$
$$-\int_{t_s}^{t_e}\int_\Gamma \lambda_{i+1}n_i\eta_{12}\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma_N+\Gamma_S+\Gamma_E}\lambda_4 n_1\eta_{12}\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t$$
$$-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma_N+\Gamma_S+\Gamma_E}\lambda_5 n_2\eta_{12}\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t=0 \tag{B.5}$$

変分学の基本補助定理[27]より，次式が導かれる．

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\lambda_3}{\partial x_2}=0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{B.6}$$

$$\mathrm{c}_1 n_1-\lambda_2 n_1-\lambda_3 n_2=0 \quad \text{on} \quad \gamma \tag{B.7}$$

(B.7)が物体の表面の領域に対して，方程式を満足するように恒等的にゼロにするため，次式を置く．

$$(\lambda_2 \quad \lambda_3)=(\mathrm{c}_1 \quad 0) \quad \text{on} \quad \gamma \tag{B.8}$$

境界 Γ_N,Γ_S と Γ_E では次の関係が導かれる．

$$-(\lambda_2+\lambda_4)n_1-\lambda_3 n_2=0 \quad \text{on} \quad \Gamma_N,\Gamma_S,\Gamma_E \tag{B.9}$$

任意形状に対して，恒等的にゼロにするため，次式を置く．

$$\lambda_3=0,\quad \lambda_2=-\lambda_4 \quad \text{on} \quad \Gamma_N,\Gamma_S,\Gamma_E \tag{B.10}$$

境界 Γ_w についても同様であり，次の関係が導かれる．

$$\lambda_2=0 \quad \lambda_3=0 \quad \text{on} \quad \Gamma_W \tag{B.11}$$

次に流速 u_1 における第 1 変分を導く．式(3.15)より次式を用いる．

$$W_2(\varepsilon,t,x_1,x_2)=u_1(t,x_1,x_2)+\alpha\eta_{13}(x_1,x_2) \quad \text{in} \quad \Omega \tag{B.12}$$

関数 η_{13} は，u_1 の第 1 変分をとるために導入した任意関数である．ただし，η_{13} は，γ で前もって定められた値，$u_1=0$ を満たすような値でなければならない．境界 γ, Γ_w 上では，常に $u_1=0$ であるため，ε が変化し，u_1 に微小変化を加えた $u_1+\varepsilon\eta_{13}$ もまたゼロでなければならない．すなわち，$W_2=u_1=0$ であり，この境界上では，η_{13} は次式となる．

$$\eta_{13}(x_1,x_2)=0 \quad \text{on} \quad \gamma,\Gamma_W \tag{B.13}$$

上式の条件より，ラグランジュ関数，式(3.14)の右辺の第 1 項目は次式となる．

$$\left[\frac{\partial J(u_1+\varepsilon\eta_{13})}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}=\left[\frac{\partial J(u_1+\varepsilon\cdot 0)}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}=0 \quad \text{on} \quad \gamma \tag{B.14}$$

ラグランジュ関数，式(3.14) 右辺の第3項は次式となる．

$$
\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}(u_1+\varepsilon\eta_{13})\left\{\frac{\partial \lambda_2}{\partial t}-\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \lambda_{j+1}}{\partial x_1}+\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j}\right)\right\}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\right]_{\varepsilon=0}
$$
$$
+\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}u_2\left\{\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}-\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \lambda_{j+1}}{\partial x_2}+\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_j}\right)\right\}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\right]_{\varepsilon=0}
$$
$$
=\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\left\{\frac{\partial \lambda_2}{\partial t}-\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \lambda_{j+1}}{\partial x_1}+\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j}\right)\right\}\eta_{13}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t
$$
(B.15)

ラグランジュ関数，式(3.14) 右辺の第4項は次式となる．

$$
\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_2\left\{-(u_1+\varepsilon\eta_{13})\frac{\partial(u_1+\varepsilon\eta_{13})}{\partial x_1}-u_2\frac{\partial(u_1+\varepsilon\eta_{13})}{\partial x_2}\right\}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\right]_{\varepsilon=0}
$$
$$
+\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_3\left\{-(u_1+\varepsilon\eta_{13})\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right\}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\right]_{\varepsilon=0}
$$
$$
=\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_2\left(-u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\eta_{13}-u_1\frac{\partial \eta_{13}}{\partial x_1}-u_2\frac{\partial \eta_{13}}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t
$$
$$
+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_3\left(-u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\eta_{13}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t
$$
$$
=-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}\lambda_2 u_i n_i\eta_{13}\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\left(u_j\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j}-\lambda_{j+1}\frac{\partial u_j}{\partial x_1}\right)\eta_{13}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t
$$
$$
+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\eta_{13}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t
$$
(B.16)

ラグランジュ関数，式(3.14) 右辺の第5項は次式となる．

$$
-\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}(u_1+\varepsilon\eta_{13})\left\{-\lambda_1 u_j n_j+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial \lambda_{j+1}}{\partial x_1}+\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j}\right)n_j\right\}\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t\right]_{\varepsilon=0}
$$
$$
=-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}\left\{-\lambda_1 u_j n_j+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial \lambda_{j+1}}{\partial x_1}+\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j}\right)n_j\right\}\eta_{13}\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t
$$
(B.17)

ラグランジュ関数，式(3.14) 右辺の第 13 項は次式となる．

$$
-\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\int_{\Omega}\left[\lambda_2(t,x_1,x_2)\{u_1(t,x_1,x_2)+\varepsilon\eta_{13}(x_1,x_2)\}\right]_{t_s}^{t_e}\mathrm{d}\Omega\right]_{\varepsilon=0}
$$
$$
-\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\int_{\Omega}\left[\lambda_3(t,x_1,x_2)u_2(t,x_1,x_2)\right]_{t_s}^{t_e}\mathrm{d}\Omega\right]_{\varepsilon=0}
$$
$$
=-\left[\int_{\Omega}\left[\lambda_2(t,x_1,x_2)\eta_{13}(x_1,x_2)\right]_{t_s}^{t_e}\mathrm{d}\Omega\right]_{\varepsilon=0}
$$
$$
=-\int_{\Omega}\{\lambda_2(t_e,x_1,x_2)-\lambda_2(t_s,x_1,x_2)\}\eta_{13}(x_1,x_2)\mathrm{d}\Omega
$$
(B.18)

同様に他の項についても，u_1についての第 1 変分をとる．以上をまとめると次式となる．

$$
\left[\frac{\partial L(u_1+\varepsilon\eta_{13})}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}=\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\left\{\frac{\partial \lambda_2}{\partial t}-\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1}\right.
$$
$$
\left.+u_j\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j}-\lambda_{j+1}\frac{\partial u_j}{\partial x_1}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \lambda_{j+1}}{\partial x_1}+\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j}\right)\right\}\eta_{13}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t
$$
$$
+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\eta_{13}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t
$$
$$
-\int_{\Omega}\{\lambda_2(t_e,x_1,x_2)-\lambda_2(t_s,x_1,x_2)\}\eta_{13}(x_1,x_2)\mathrm{d}\Omega
$$
$$
-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}\left\{\lambda_2 u_j n_j-\lambda_1 n_1+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial \lambda_{j+1}}{\partial x_1}+\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j}\right)n_j\right\}\eta_{13}\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t
$$
$$
+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma_W}\lambda_6\eta_{13}\mathrm{d}\psi\mathrm{d}t+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\lambda_8\eta_{13}\mathrm{d}\psi\mathrm{d}t=0
$$
(B.19)

変分学の基本補助定理より領域 Ω において次式が導かれる．

$$
\frac{\partial \lambda_2}{\partial t}-\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1}+u_j\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j}-\lambda_{j+1}\frac{\partial u_j}{\partial x_1}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \lambda_{j+1}}{\partial x_1}+\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_j}\right)=0
$$
$$
\text{on}\quad \Omega
$$
(B.20)

上式は，時間微分項の符号に対して粘性項の符号が同符号であるため，逆拡散を引き起こす[32][33]．安定的に解析するため，終了の試験時間から開始の試験時間への時間方向を次式で定義する[34].

$$
t=-\tau\quad \text{on}\quad \Omega \tag{B.21}
$$

式(B.20)の第 2 項より次式を導く．

$$
\lambda_2(t_e,x_1,x_2)-\lambda_2(t_s,x_1,x_2)=0\quad \text{in}\quad \Omega \tag{B. 22}
$$

次に境界 Γ において，Γ_Wと γ には基本境界条件があるため，式(B.13)を考慮することで，次式が導かれる．

$$
\lambda_2 u_i n_i-\lambda_1 n_1+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_1}+\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_1}\right)n_1+\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \lambda_3}{\partial x_1}\right)n_2\right\}=S_1=0
$$
$$
\text{on}\quad \Gamma_N,\Gamma_S,\ \Gamma_E
$$
(B. 23)

また他の項について次式が導かれる．

$$\lambda_6 = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_W, \quad \lambda_8 = 0 \quad \text{on} \quad \gamma \tag{B.24}$$

以上，流速 u_1 における随伴方程式と境界条件を導出した．同様に u_2 について,第 1 変分を取ることで，すべての随伴方程式と境界条件を導出する．

C 感度方程式の導出（空間座標に対する第 1 変分）

C1　積分領域の変数変換

境界 Γ での積分領域を変数変換するためのヤコビアンは次式となる[23][24].

$$\begin{aligned}
\omega(\varepsilon) &= \det(\mathbf{D}x(\varepsilon))\left|(\mathbf{D}x(\varepsilon))^{-T}\boldsymbol{n}\right| = \det(\mathbf{D}x(\varepsilon))\left|\begin{bmatrix} 1+\varepsilon\dfrac{\partial\eta_1(0)}{\partial x_1} & \varepsilon\dfrac{\partial\eta_1(0)}{\partial x_2} \\ \varepsilon\dfrac{\partial\eta_2(0)}{\partial x_1} & 1+\varepsilon\dfrac{\partial\eta_2(0)}{\partial x_2}\end{bmatrix}^{-T}\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2\end{bmatrix}\right| \\
&= \det(\mathbf{D}x(\varepsilon))\left|\frac{1}{\det(\mathbf{D}x(\varepsilon))}\begin{bmatrix} 1+\varepsilon\dfrac{\partial\eta_2(0)}{\partial x_2} & -\varepsilon\dfrac{\partial\eta_1(0)}{\partial x_2} \\ -\varepsilon\dfrac{\partial\eta_2(0)}{\partial x_1} & 1+\varepsilon\dfrac{\partial\eta_1(0)}{\partial x_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2\end{bmatrix}\right| \\
&= \sqrt{\left\{\left(1+\varepsilon\frac{\partial\eta_2(0)}{\partial x_2}\right)n_1 - \varepsilon\frac{\partial\eta_1(0)}{\partial x_2}n_2\right\}^2 + \left\{-\varepsilon\frac{\partial\eta_2(0)}{\partial x_1}n_1 + \left(1+\varepsilon\frac{\partial\eta_1(0)}{\partial x_1}\right)n_2\right\}^2} \\
&= \left\{1 + 2\left(\frac{\partial\eta_2(0)}{\partial x_2}n_1^2 - \frac{\partial\eta_2(0)}{\partial x_1}n_1 n_2 - \frac{\partial\eta_1(0)}{\partial x_2}n_1 n_2 + \frac{\partial\eta_1(0)}{\partial x_1}n_2^2\right)\varepsilon + o\left(\varepsilon^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{C.1}$$

上式をテイラー展開より近似すると次式となる．

$$\omega(\varepsilon) = 1 + \left(\frac{\partial\eta_2(0)}{\partial x_2}n_1^2 - \frac{\partial\eta_2(0)}{\partial x_1}n_1 n_2 - \frac{\partial\eta_1(0)}{\partial x_2}n_1 n_2 + \frac{\partial\eta_1(0)}{\partial x_1}n_2^2\right)\varepsilon + o\left(\varepsilon^2\right) \tag{C.2}$$

$o(\varepsilon)$は，漸近級数を打ち切ったときの剰余項，ランダウ記号を示す．上式を式変形すれば，文献[23]と一致する．

$$\begin{aligned}
\omega(\varepsilon) &= 1 + \left\{\frac{\partial\eta_2(0)}{\partial x_2}\left(1-n_1^2\right) - \frac{\partial\eta_2(0)}{\partial x_1}n_1 n_2 - \frac{\partial\eta_1(0)}{\partial x_2}n_1 n_2 + \frac{\partial\eta_1(0)}{\partial x_1}\left(1-n_2^2\right)\right\}\varepsilon \\
&\quad + o\left(\varepsilon^2\right) \\
&= 1 + \left\{\frac{\partial\eta_1(0)}{\partial x_1} + \frac{\partial\eta_2(0)}{\partial x_2} - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\eta_1(0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\eta_1(0)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\eta_2(0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\eta_2(0)}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2\end{bmatrix}\right\}\varepsilon + o\left(\varepsilon^2\right) \\
&= 1 + \left(\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}(0) - \mathbf{D}\boldsymbol{\eta}(0)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}\right)\varepsilon + o\left(\varepsilon^2\right) \\
&= 1 + \mathrm{div}_\Gamma\boldsymbol{\eta}(0)\varepsilon + o\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned} \tag{C.3}$$

C2　領域 Ω 上での形状微分と物質微分

空間座標 $\boldsymbol{x}(\varepsilon)$ と設計変数 $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ をパラメータとするポテンシャル Φ を定義する．

$$\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon), \boldsymbol{z}(\varepsilon)) = \phi(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), z_1(\varepsilon), z_2(\varepsilon)) \tag{C.4}$$

空間座標 $\boldsymbol{x}(\varepsilon)$ に対して $\varepsilon=0$ まわりに $\Phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon))$ を，テイラー展開する．

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon), \boldsymbol{z}(\varepsilon)) &= \phi\left(\boldsymbol{x}(0) + \varepsilon\boldsymbol{\eta}(0) + o\left(\varepsilon^2\right), \boldsymbol{z}(\varepsilon)\right) \\
&= \phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(\varepsilon)) + \frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(\varepsilon))}{\partial x_1}\varepsilon\eta_1(0) \\
&\quad + \frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(\varepsilon))}{\partial x_2}\varepsilon\eta_2(0) + o\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned} \tag{C.5}$$

領域 Ω の形状微分を次式で定義する．

$$\phi' = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(\varepsilon)) - \phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(0))}{\varepsilon} \quad \text{in} \quad \Omega \tag{C.6}$$

上式の上付き添え字“　′　”は形状微分を示す．領域 Ω の物質微分を次式で定義する．

$$\dot{\phi} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon), \boldsymbol{z}(\varepsilon)) - \phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(0))}{\varepsilon} \quad \text{in} \quad \Omega \tag{C.7}$$

上式の“・”は物質微分を示す．領域 Ω 上での物質微分は(C.5)のテイラー展開より次式のように式変形できる．

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(\varepsilon)) + \dfrac{\partial\phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(\varepsilon))}{\partial x_1}\varepsilon\eta_1(0) + \dfrac{\partial\phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(\varepsilon))}{\partial x_2}\varepsilon\eta_2(0) + o\left(\varepsilon^2\right) - \phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(0))}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(\varepsilon)) - \phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(0))}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(\varepsilon))}{\partial x_1}\eta_1(0) + \frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(\varepsilon))}{\partial x_2}\eta_2(0)\right\} + \lim_{\varepsilon\to 0}o(\varepsilon) \\
&= \phi'(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(0)) + \nabla\phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(0))\cdot\boldsymbol{\eta}(0) = \phi' + \nabla\phi\cdot\boldsymbol{\eta} \quad \text{in} \quad \Omega
\end{aligned} \tag{C.8}$$

C3　境界 Γ 上での形状微分と物質微分

境界 Γ の $\boldsymbol{z}(\varepsilon)$ に対して，$\varepsilon=0$ まわりに，法線方向に従って, $\Phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon),\boldsymbol{z}(\varepsilon))$ を，テイラー展開する（図 2 参照）[35].

$$
\begin{aligned}
&\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon), z(\varepsilon)) = \phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon), z(0) + \varepsilon(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{n}) \\
&= \phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon), z(0)) + \varepsilon(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\eta})\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon), \boldsymbol{z}(0))}{\partial n} + o(\varepsilon^2) \\
&= \phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon), z(0)) \\
&+ \varepsilon(n_1\eta_1 + n_2\eta_2)\left(\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon), \boldsymbol{z}(0))}{\partial x_1}n_1 + \frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon), \boldsymbol{z}(0))}{\partial x_2}n_2\right) \\
&+ o(\varepsilon^2) \quad \text{on} \quad \Gamma
\end{aligned}
\tag{C.9}
$$

速度場のベクトル $\boldsymbol{\eta}$（形状 γ の変形方向のベクトル）に対する単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ への成分，すなわち内積 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\eta}$ を用いて，法線ベクトル方向の変形方向の成分を考慮する．形状微分は次式のように変形できる．

$$
\begin{aligned}
&\phi' = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{x}(0), z(\varepsilon)) - \phi(\boldsymbol{x}(0), z(0))}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{x}(0), z(0)) + \varepsilon(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\eta})\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon), z(0))}{\partial n} + o(\varepsilon^2) - \phi(\boldsymbol{x}(0), z(0))}{\varepsilon} \\
&= (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\eta}(0))\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}(0), z(0))}{\partial n} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}n_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}n_2\right)(n_1\eta_1 + n_2\eta_2) \quad \text{on} \quad \Gamma
\end{aligned}
\tag{C.10}
$$

境界 Γ 上の物質微分は次式となる．

$$
\begin{aligned}
&\dot{\phi} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon), z(\varepsilon)) - \phi(\boldsymbol{x}(0), z(0))}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{x}(0), z(\varepsilon)) + \varepsilon(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\eta})\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}(0), z(\varepsilon))}{\partial m} + o(\varepsilon^2) - \phi(\boldsymbol{x}(0), z(0))}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{x}(0), z(\varepsilon)) - \phi(\boldsymbol{x}(0), z(0))}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\eta})\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}(0), z(\varepsilon))}{\partial m}\right\} + \lim_{\varepsilon\to 0}o(\varepsilon) \\
&= \phi' + \frac{\partial\phi}{\partial m}\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\eta}(0) = \phi' + \nabla_\Gamma\phi\cdot\boldsymbol{\eta}(0) \quad \text{on} \quad \Gamma
\end{aligned}
\tag{C.11}
$$

式(2.10)から(C.11)は次式となる．

$$
\dot{\phi} = \frac{\partial\phi}{\partial n}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\eta}(0) + \nabla\phi\cdot\boldsymbol{\eta}(0) - \boldsymbol{n}\frac{\partial\phi}{\partial n}\cdot\boldsymbol{\eta}(0) = \nabla\phi\cdot\boldsymbol{\eta}(0) \quad \text{on} \quad \Gamma
\tag{C.12}
$$

C4　領域 Ω での設計変数（$\boldsymbol{z}$）に対する第 1 変分の導出

領域 Ω での第 1 変分を求める．ポテンシャルを $\boldsymbol{\Phi}$ とし，以下の関数 P を定義する．

$$
P = \int_\Omega \phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(0))\mathrm{d}\Omega
\tag{C.13}
$$

関数 P の第 1 変分（物質微分），dP を次式で示す．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}P = \dot{P} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{^\varepsilon\Omega}\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon), z(\varepsilon))\mathrm{d}^\varepsilon\Omega - \int_\Omega\phi(\boldsymbol{x}(0), z(0))\mathrm{d}\Omega\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_\Omega\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon), z(\varepsilon))\gamma(\varepsilon)\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega\phi(\boldsymbol{x}(0), z(0))\mathrm{d}\Omega\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_\Omega\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon), z(\varepsilon))(1 + \nabla\cdot\boldsymbol{\eta}(0)\varepsilon + o(\varepsilon^2))\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega\phi(\boldsymbol{x}(0), z(0))\mathrm{d}\Omega\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_\Omega\{\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon), z(\varepsilon)) - \phi(\boldsymbol{x}(0), z(0))\}\mathrm{d}\Omega\right] \\
&+ \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\Omega\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon), z(\varepsilon))\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}(0)\mathrm{d}\Omega\right] + \lim_{\varepsilon\to 0}o(\varepsilon^2) \\
&= \int_\Omega\dot{\phi}(\boldsymbol{x}(0), z(0))\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega\phi(\boldsymbol{x}(0), z(0))\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}(0)\mathrm{d}\Omega
\end{aligned}
\tag{C.14}
$$

ここで，$^\varepsilon\Omega$ は微小に形状が変形したときの領域を示す．式(C.8)を用いるとさらに次式のように式変形できる．

$$
\begin{aligned}
&dP = \dot{P} = \int_\Omega\phi'(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(0))\mathrm{d}\Omega \\
&+ \int_\Omega\nabla\phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(0))\cdot\boldsymbol{\eta}(0)\mathrm{d}\Omega \\
&+ \int_\Omega\phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(0))\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}(0)\mathrm{d}\Omega \\
&= \int_\Omega\phi'(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(0))\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma\phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(0))\boldsymbol{\eta}(0)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\Gamma \\
&= \int_\Omega\phi'\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma\phi(\eta_1 n_1 + \eta_2 n_2)\mathrm{d}\Gamma
\end{aligned}
\tag{C.15}
$$

C5　境界 Γ での設計変数に対する第 1 変分（物質微分と形状微分の関係）

設計変数($\boldsymbol{z}$)が微小に変動した場合における第 1 変分を考える．すなわち，境界 Γ で微小変化した場合における第 1 変分を求める．ポテンシャルを $\boldsymbol{\Phi}$ とし，以下の関数を定義する．

$$
P = \int_\gamma \phi(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{z}(0))d\gamma
\tag{C.16}
$$

P の第 1 変分(物質微分)dP は次式である．

$$
\begin{aligned}
dP &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{{}^{\varepsilon}\gamma}\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon),\boldsymbol{z}(\varepsilon))\mathrm{d}^{\varepsilon}\gamma - \int_{\gamma}\phi(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{z}(0))\mathrm{d}\gamma\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{\gamma}\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon),\boldsymbol{z}(\varepsilon))\omega(\varepsilon)\mathrm{d}\gamma - \int_{\gamma}\phi(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{z}(0))\mathrm{d}\gamma\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{\gamma}\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon),\boldsymbol{z}(\varepsilon))(1+\varepsilon\ \mathrm{div}_{\Gamma}\boldsymbol{\eta}(0))\mathrm{d}\gamma - \int_{\gamma}\phi(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{z}(0))\mathrm{d}\gamma\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_{\gamma}\{\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon),\boldsymbol{z}(\varepsilon)) - \phi(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{z}(0))\}\mathrm{d}\gamma\right] \\
&+ \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\gamma}\phi(\boldsymbol{x}(\varepsilon),\boldsymbol{z}(\varepsilon))\mathrm{div}_{\Gamma}\boldsymbol{\eta}(0)\mathrm{d}\gamma\right] \\
&= \int_{\gamma}\dot{\phi}(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{z}(0))\mathrm{d}\gamma + \int_{\gamma}\phi(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{z}(0))\mathrm{div}_{\Gamma}\boldsymbol{\eta}(0)\mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
\tag{C.17}
$$

上式の導出にあたって，式(C.3)の ω を用いた．$div_{\Gamma}\boldsymbol{\eta}$ は式(2.12)である．次に(C.10)および式(C.11)を用いて，(C.17)を式変形する．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}P &= \int_{\gamma}\phi'(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{z}(0))\mathrm{d}\gamma \\
&+ \int_{\gamma}\nabla_{\Gamma}\phi(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{z}(0))\cdot\boldsymbol{\eta}(0)\mathrm{d}\gamma \\
&+ \int_{\gamma}\phi(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{z}(0))\mathrm{div}_{\Gamma}\boldsymbol{\eta}(0)\mathrm{d}\gamma \\
&= \int_{\gamma}\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{z}(0))}{\partial n}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\eta}(0)\mathrm{d}\gamma \\
&+ \int_{\gamma}\mathrm{div}_{\Gamma}\{\phi(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{z}(0))\boldsymbol{\eta}(0)\}\mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
\tag{C.18}
$$

境界 γ の平均曲率を κ とすると，(C.18)を次式のように表す事ができる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}P &= \int_{\gamma}\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{z}(0))}{\partial n}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\eta}(0)\mathrm{d}\gamma \\
&+ \int_{\gamma}\kappa\phi(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{z}(0))\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\eta}(0)\mathrm{d}\gamma \\
&= \int_{\gamma}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}n_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}n_2\right)(n_1\eta_1 + n_2\eta_2)\mathrm{d}\gamma \\
&+ \kappa\int_{\gamma}\phi(n_1\eta_1 + n_2\eta_2)\mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
\tag{C.19}
$$

C6　感度方程式

ラグランジュ関数,式(3.7)の第 1 項を L_1 と定義する．式(C.19)の式を用いると次式のように式変形できる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}L_1 &= \mathrm{d}\left(-\mathrm{c}_1\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}T_1\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t\right) \\
&= -\int_{\gamma}\mathrm{c}_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1}n_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2}n_2\right)(n_1\eta_1 + n_2\eta_2)\mathrm{d}\gamma \\
&- \mathrm{c}_1\kappa\int_{\gamma}T_1(n_1\eta_1 + n_2\eta_2)\mathrm{d}\gamma
\end{aligned}
\tag{C.20}
$$

ラグランジュ関数　式(3.7)の第 2 項を L_2 と定義とする．式(C.15)の式を用いると次式のように式変形できる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}L_2 &= \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_1{}'\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t \\
&+ \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_1\left(\frac{\partial u_1{}'}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2{}'}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t \\
&+ \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}\lambda_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)(\eta_1 n_1 + \eta_2 n_2)\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_1{}'\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t \\
&+ \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}\left(u_1{}'\lambda_1 n_1 + u_2{}'\lambda_1 n_2\right)\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t \\
&- \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\left(u_1{}'\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_1} + u_2{}'\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t \\
&+ \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}\lambda_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)(\eta_1 n_1 + \eta_2 n_2)\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{C.21}
$$

上式の変形について，文献[23][24]の形状微分についての合成関数の微分規則に従っている．ラグランジュ関数　式(3.7)の第 3 項を L_3 と定義する．式(C.15)の公式を用いると次式のように式変形できる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}L_3 &= \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_{i+1}'\left[-\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}\right]\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t \\
&+ \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_{i+1}\left[-\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}\right]'\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t \\
&+ \int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}\lambda_{i+1}\left[-\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}\right](\eta_1 n_1 + \eta_2 n_2)\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{C.22}
$$

上式の第 2 項を次式のように式変形する．

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_{i+1}\left[-\frac{\partial u_i}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial x_i}-u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}\right]'\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t \\
&=\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_{i+1}\left[-\frac{\partial u'_i}{\partial t}-\frac{\partial p'}{\partial x_i}-u'_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-u_j\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)\right\}\right]\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t \\
&=\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_i}p'\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t-\int_{\Omega}\left[\lambda_{i+1}u'_i\right]_{t_s}^{t_e}\mathrm{d}\Omega+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}u'_i\lambda_{i+1}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t \\
&+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}u'_i\left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial t}-\lambda_{j+1}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+u_j\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}+\frac{\partial\lambda_{j+1}}{\partial x_i}\right)\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t \\
&+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\psi}\lambda_{i+1}\left\{-p'n_i+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)n_j\right\}\mathrm{d}\psi\mathrm{d}t \\
&-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\psi}u'_i\left\{\lambda_{i+1}u_jn_j+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}+\frac{\partial\lambda_{j+1}}{\partial x_i}\right)n_j\right\}\mathrm{d}\psi\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{C.23}
$$

上式の式変形において，文献[23][24]の形状微分の規則を用いた．ラグランジュ関数　式(C.15)の第 8 項を L_8 と定義する．式(C.19)の式を用いると次式のように式変形できる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}L_8&=\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\lambda_8\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}n_2\right)\left(n_1\eta_1+n_2\eta_2\right)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t \\
&+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}u_1\left(\frac{\partial\lambda_8}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial\lambda_8}{\partial x_2}n_2\right)\left(n_1\eta_1+n_2\eta_2\right)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t \\
&+\kappa\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\lambda_8u_1\left(n_1\eta_1+n_2\eta_2\right)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t \\
&=\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\mathrm{c}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}n_2\right)\left(n_1\eta_1+n_2\eta_2\right)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{C.24}
$$

境界 γ 上の境界条件 $u_1=0$, $\lambda_8=c_1$ を用いた．dL_4,dL_5,dL_6,dL_7,dL_9 の項はゼロである．ラグランジュ関数，第 10 項について，第 1 変分をとると次式となる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}L_{10}&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{c}_2\int_{t_s}^{t_e}\int_{\varepsilon\Pi}\mathrm{d}^{\varepsilon}\Pi\mathrm{d}t-\mathrm{c}_2\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Pi}\mathrm{d}\Pi\mathrm{d}t}{\varepsilon} \\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{c}_2\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Pi}\det\left(\mathbf{D}^{\varepsilon}\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}\Pi\mathrm{d}t-\mathrm{c}_2\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Pi}\mathrm{d}\Pi\mathrm{d}t}{\varepsilon} \\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{c}_2\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Pi}\left\{1+\varepsilon\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1}\right)+o\left(\varepsilon^2\right)\right\}\mathrm{d}\Pi\mathrm{d}t-\mathrm{c}_2\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Pi}\mathrm{d}\Pi\mathrm{d}t}{\varepsilon} \\
&=\mathrm{c}_2\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Pi}\mathrm{div}\boldsymbol{\eta}\mathrm{d}\Pi\mathrm{d}t \\
&=\mathrm{c}_2\left\{\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\left(\eta_1n_1+\eta_2n_2\right)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Pi}0\times\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\eta_2}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}\Pi\mathrm{d}t\right\} \\
&=\mathrm{c}_2\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\left(\eta_1n_1+\eta_2n_2\right)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{C.25}
$$

以上より，ラグランジュ関数をまとめると次式となる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}L&=-\int_{\gamma}\mathrm{c}_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial T_1}{\partial x_2}n_2\right)\left(n_1\eta_1+n_2\eta_2\right)\mathrm{d}\gamma \\
&-\mathrm{c}_1\kappa\int_{\gamma}T_1\left(n_1\eta_1+n_2\eta_2\right)\mathrm{d}\gamma \\
&+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda_1'\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t \\
&+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}\lambda_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\left(\eta_1n_1+\eta_2n_2\right)\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t \\
&+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\lambda'_{i+1}\left[-\frac{\partial u_i}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial x_i}-u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}\right]\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t \\
&+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}\frac{\partial\lambda_{k+1}}{\partial x_k}p'\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t-\int_{\Omega}\left[\lambda_{i+1}u'_i\right]_{t_s}^{t_e}\mathrm{d}\Omega+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}u'_i\lambda_{i+1}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t \\
&+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Omega}u'_i\left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial t}-\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_i}-\lambda_{j+1}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+u_j\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}+\frac{\partial\lambda_{j+1}}{\partial x_i}\right)\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t \\
&+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\psi}\lambda_{i+1}\left\{-p'n_i+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)n_j\right\}\mathrm{d}\psi\mathrm{d}t \\
&-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\psi}u'_i\left\{\lambda_{i+1}u_jn_j-\lambda_1n_i+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}+\frac{\partial\lambda_{j+1}}{\partial x_i}\right)n_j\right\}\mathrm{d}\psi\mathrm{d}t \\
&+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\Gamma}\lambda_{i+1}\left[-\frac{\partial u_i}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial x_i}-u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}\right]\left(\eta_1n_1+\eta_2n_2\right)\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t \\
&+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\mathrm{c}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}n_2\right)\left(n_1\eta_1+n_2\eta_2\right)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t \\
&+\mathrm{c}_2\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\left(\eta_1n_1+\eta_2n_2\right)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{C.26}
$$

表 1 の計算条件(3.11),(3.12),(3.13),(3,17)から，dL は次式となる．

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\lambda_{i+1}\left\{-p'n_i+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)n_j\right\}\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t \\
&=\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\left(\lambda_2\frac{\partial T_1}{\partial n}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\eta}+\lambda_3\frac{\partial T_2}{\partial n}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\eta}\right)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t \\
&=\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\left(\mathrm{c}_1\frac{\partial T_1}{\partial n}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\eta}\right)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t \\
&=\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\mathrm{c}_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial T_1}{\partial x_2}n_2\right)\left(\eta_1n_1+\eta_2n_2\right)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{C.27}
$$

ここで下記の式を用いた．(C.26)式の第 10 項を,(C.10)と(B.8)を用いて，次式のように変形する．

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\lambda_{i+1}\left[-\frac{\partial u_i}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial x_i}-u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right\}\right](\eta_1 n_1+\eta_2 n_2)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t\\
&=-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\left(\lambda_2\frac{\partial p}{\partial x_1}+\lambda_3\frac{\partial p}{\partial x_2}\right)(\eta_1 n_1+\eta_2 n_2)\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t\\
&=-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\mathrm{c}_1\frac{\partial p}{\partial x_1}(\eta_1 n_1+\eta_2 n_2)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{C.28}
$$

(C.26)の第 12 項を，(B.8)の条件より，次式のように変形する．

$$
\begin{aligned}
&-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\psi}u_i'\left\{\lambda_{i+1}u_j n_j-\lambda_1 n_i+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial\lambda_{i+1}}{\partial x_j}+\frac{\partial\lambda_{j+1}}{\partial x_i}\right)n_j\right\}\mathrm{d}\psi\mathrm{d}t\\
&=-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}u_i'S_i\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t=-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\left(\frac{\partial u_1}{\partial n}S_1+\frac{\partial u_2}{\partial n}S_2\right)(\eta_1 n_1+\eta_2 n_2)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t\\
&=-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}n_2\right)S_1+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}n_2\right)S_2\right\}(\eta_1 n_1+\eta_2 n_2)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{C.29}
$$

境界 γ 上の *non-slip* 条件，$u=0$ を用いた．境界 γ では u は常にゼロであるため，u の時間変化はない．そのため $\partial u/\partial t=0$ である．また本研究では，有限要素メッシュに，三角形一次要素を用いた．そのため，数値計算において，境界 γ 上では，二階の微分である粘性項は 0 となる．

(C.26)の第 11 項は次式のように，表 1 の境界条件を考慮して変形する．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}L=\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\mathrm{c}_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}n_2\right)(n_1\eta_1+n_2\eta_2)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t\\
&-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}n_2\right)S_1+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}n_2\right)S_2\right\}(\eta_1 n_1+\eta_2 n_2)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t\\
&+\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\lambda_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)(\eta_1 n_1+\eta_2 n_2)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t-\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}\mathrm{c}_1\frac{\partial p}{\partial x_1}(\eta_1 n_1+\eta_2 n_2)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t\\
&-\mathrm{c}_1\kappa\int_{\gamma}T_1(n_1\eta_1+n_2\eta_2)\mathrm{d}\gamma+\mathrm{c}_2\int_{t_s}^{t_e}\int_{\gamma}(\eta_1 n_1+\eta_2 n_2)\mathrm{d}\gamma\mathrm{d}t=0
\end{aligned}
\tag{C.30}
$$

任意の速度場（ベクトル場）η_1 および η_2 に対して，常に $dL=0$ となるためには，(3.21)-(3.23)が成り立つ．

参考文献

[1] Wiley J. Larson, James R. Wertz, Space Mission Analysis and Design, Microcosm, (1999).

[2] Thomas P. Sarafin, Spacecraft Structures and Mechanisms from Concept to Launch, Springer, (1995).

[3] PROJECT RAND SATELLITE VEHICLE FOLLOW-ON Reports, Aerodynamics Gas Dynamics and Heat Transfer Problems of a Satellite Rocket, Project RAND publication, RA-15022, (1947).

[4] Bakhtian, N.M., and Aftosmis, M.J., "Maximum Attainable Drag Limits for Atmospheric Entry via Supersonic Retropropulsion," Proceedings of the 8th International Planetary Probe Workshop, Portsmouth, VA, June, 2011.

[5] Watson, S.R., Toward the minimum drag on a body of given volume in slow viscous flow, *Institute of Mathematics and its Applications*, 7(1971), pp.367-376.

[6] Pironneau, O., On optimum profiles in Stokes flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 59(1973), pp. 117-128.

[7] Bourot, J.M., On the numerical computation of the optimum profiles in Stokes flow, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65(1974), pp.1007-1021.

[8] Taseli, H. and Demiralp, M., Drag minimization in Stokes flow, *International Journal of Engineering Science*, 27(1989), pp.633-640.

[9]Sano, M. and Sakai, H., Numerical determination of minimum drag profile in Stokes flow (in case of two-dimensional finite region and constant cross-sectional area). *Journal of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, 26(1983), pp.27-33.

[10]Ganesh, R.K., The minimum drag profile in laminar flow, *Journal of Fluids Engineering*, 116(1994), pp.456-462.

[11]Katamine, E. and Azegami, H., Solution to viscous flow field domain optimization problems, *The Japan Society of Mechanical Engineers*, 60(1994), pp. 1479-1486.

[12] Lund, E. and Moller, H., Jakobsen, L.A. Shape design optimization of steady fluid-structure interaction problems with large displacements, *AIAA Paper*, 1624(2001).

[13] Yagi, H. and Kawahara, M., Shape optimization of a body located in low Reynolds number flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids,* 48(2005), pp. 819- 833.

[14] Guest, J.K. and Prevost, J.H., Topology optimization of creeping fluid flows using a Darcy-Stokes finite element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(2006), pp.461-484.

[15] Michael Zabarankin and Anton Molyboha, 3D Shape Optimization in Viscous Incompressible Fluid under Oseen Approximation, SIAM J. on Control and Optimization, 49(2011), pp. 1358-1382.

[16] Schmidt S. Efficient large scale aerodynamic design based on shape calculus, Ph.D. thesis, University of Trier, Germany.

[17] D.N.Srinath and S.Mittal. A stabilized finite element method for shape optimization in low Reynolds number

flows, International Journal For Numerical Methods In Fluids, 54:1451--1471, 2007.
[18] Zhiming, G., Yichen, M. and Hongwei, Z., Optimal shape design for the time-dependent Navier-Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 57(2007), pp.1505 - 1526.
[19] Heuveline Vincent, Strauß Frank, Shape optimization towards stability in constrained hydrodynamic systems, Journal of Computational Physics, Volume 228, Issue 4, p. 938-951.
[20] Mavriplis, D.J., Multigrid solution of the discrete adjoint for optimization problems on unstructured meshes. *AIAA Journal*, 44(2006), pp.42-50.
[21] Shinohara, K., Okuda, H., Ito, S., Nakajima, N. and Ida, M., Shape optimization using an adjoint variable method in ITBL grid environment, *Proceedings of ICONE*, 14-89568(2006).
[22] Gelfand, I.M. and Fomin, S.V., Calculus of variations (Translated and Edited by Richard A. Silverman), *Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall*, (1963).
[23] J. Sokołowski and J.P. Zolesio, Introduction to shape optimization: shape sensitivity analysis, Springer Series in Computational Mathematics vol. 10, Springer, Berlin (1992).
[24] M.C. Delfour, J.-P. Zolésio, Shapes and geometries : analysis, differential calculus, and optimization, Society for Industrial Mathematics, 2011.
[25] T. E. Tezduyar , S. Mittal , S. E. Ray , R. Shih, Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.95 n.2, p.221-242, March 1992
[26] Zhang SL. GPBi-CG: generalized product-type methods based on Bi-CG for solving nonsymmetric linear systems. SIAM Journal on Scientific Computing 1997; 18(2): 856–869.
[27] Robert Weinstock, Calculus of Variations, Dover Publications, (1974).
[28] Kim, H.J., Salim, K. and Nakahashi, K. Surface modification method for aerodynamic design optimization. *AIAA Journal*, 43(2005), pp.727-740.
[29] Frederic, J.B., Considerations on the spring analogy, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 32(2000), pp.647-668.
[30] Brian T.H., Mesh deformation using the biharmonic operator, International journal for Numerical Methods in Engineering, 56(2003), pp.367-376.
[31] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., Finite Element Method: Volume 1, The Basis, 5th edition, Butterworth-Heinemann, UK, (2000).
[32] Gilboa, G., Sochen, N. and Zeevi, Y., Forward-and-backward diffusion processes for adaptive image enhancement and denoising, *IEEE Transaction on Image Processing*, 11(2002), pp.689-703.
[33] Kirkup, S.M. and Wadsworth, M., Solution of inverse diffusion problems by operator-splitting methods, *Applied Mathematical Modeling*, 26(2002), pp.1003-1018.
[34] Laporte E, Tallec P. Numerical methods in sensitivity analysis and shape optimization. *Birkhauser* 2003; 127.
[35] B. Mohammadia and O. Pironneau, Applied optimal shape design, Journal of Computational and Applied Mathematics, 149(2002), pp.193-205.