Hardy 空間の位相線形構造の一断層
— 補間問題の応用の立場から —

A rift of topological linear structures of Hardy spaces
— From the standpoint of application of interpolation problems —

中井三留 *，　成田淳一郎 **

Mitsuru Nakai,　Junichiro Narita

Summary
The main purpose of this paper is to clarify the topological linear structure of classical Hardy spaces H_p defined on the unit disk $\mathbb{D}$ with exponents $0<p\leqq\infty$ in terms of big Lebesgue spaces L_p on the unit circle $\mathbb{T}=\partial\mathbb{D}$ and little Lebesgue spaces l_p on positive integers $\mathbb{N}$ as $H_p\in[l_p,L_p]$ $(0<p\leqq\infty)$ in the sense that l_p is embedded in H_p, i.e. $l_p\hookrightarrow H_p$, and H_p is embeded in L_p, i.e. $H_p\hookrightarrow L_p$, so that $\dim_l l_p\leqq\dim_l H_p\leqq\dim_l L_p$ in terms of the Banach linear dimensions. A direct consequence of this main result above is that types and cotypes of Hardy spaces H_p are identical with those of Lebesgue spaces L_p for $0<p\leqq\infty$ so that the type of H_p is $\min\{p,2\}$ for $0<p<\infty$ and 1 for $p=\infty$ and the cotype of H_p is $\max\{p,2\}$ for $0<p<\infty$ and ∞ for $p=\infty$ in the optimal sense. This implies the isomorphism theorem of Orlicz type for Hardy spaces that two Hardy spaces H_p and H_q for $0<p,\,q\leqq\infty$ are isomorphic, i.e. $H_p\approx H_q$, if and only if $p=q$. We prove the main result above by using the interpolating series for each H_p $(0<p\leqq\infty)$. For this reason the most part of this paper is devoted to give a selfcontained complete proof of the existence of constructive solutions of the interpolation problems for H_p $(0<p\leqq\infty)$.

キーワードとフレーズ： 余型，埋蔵，フレシェ空間，ハーディー空間，同型，補間級数，ルベーグ空間，位相線形構造，型.

Keywords and Phrases : cotype, embedding, Fréchet space, Hardy space, isomorphic, interpolating series, Lebesgue space, topological linear structure, type.

1．序論

線形空間の係数体は断らぬ限り複素数体 $\mathbb{C}$ とする。二つの位相線形空間 X と Y があるとき，作用素 $T:X\to Y$ で，全単射，線形，双連続なものがあるとき，X と Y は**同型**であると言い，記号 $\boldsymbol{X\approx Y}$ で示す．このとき T を $X\approx Y$ を与える作用素と言う．次に再び X と Y を位相線形空間とし，Y の閉線形部分空間 Z があって $X\approx Z$ となるとき，X は Y に**埋蔵**されると言い，記号 $\boldsymbol{X\hookrightarrow Y}$ で示す ([2] 参照).

測度空間 (Ω,Σ,μ) ([11] 参照) は常に σ 有限かつ非自明の 2 条件を満たすと仮定する．(Ω,Σ,μ) が $\boldsymbol{\sigma}$**有限**とは，Σ 内の集合列 $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\Omega=\cup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n$ かつ各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $\mu(\Omega_n)<\infty$ であるものがとれる事である．(Ω,Σ,μ) が**非自明**とは，Σ 内の集合列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，$E_n\cap E_m=\emptyset$ $(n\neq m)$, かつ $0<\mu(E_n)<\infty$ $(n\in\mathbb{N})$ となるものがあることとする．測度空間 (Ω,Σ,μ) 上の**指数** $\boldsymbol{p}$ **の Lebesgue 空間** $L_p(\Omega,\Sigma,\mu)$ を $\boldsymbol{L_p(\mu)}$ と略記する $(0<p\leqq\infty)$. 各 $f\in L_p(\mu)$ に対して

$$\|f\|_{L_p(\mu)}:=\left(\int_\Omega|f(\omega)|^p\,d\mu(\omega)\right)^{1/p}, \tag{1.1}$$

但し $p=\infty$ のときは $\|f\|_{L_\infty(\mu)}:=\operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|$ を f の $\boldsymbol{p}$ **ノルム** $(0<p\leqq\infty)$ と呼ぶ．$1\leqq p\leqq\infty$ ならこれは眞のノルムであるが，$0<p<1$ のときはノルムの公理 (特に三角不等式) を満たさないにもかかわらず，とにかく (1.1) を p ノルムと呼ぶのである．しかし，$f,g\in L_p(\mu)$ に対して

$$\operatorname{dis}_{L_p(\mu)}(f,g):=\|f-g\|_{L_p(\mu)}^{p\wedge 1}\quad(p\wedge 1:=\min\{p,1\}) \tag{1.2}$$

を f と g の間の距離として $L_p(\mu)$ に Hausdorff 位相を与えたら $L_p(\mu)$ は完備距離空間となり $L_p(\mu)$ は位相線形空間, 特

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 30D55; Secondary 46B03, 46E25, 46E30
* 名古屋工業大学・名誉教授
** 本学数学教室

に $\|\cdot\|_{L_p(\mu)}^{p\wedge 1}$ を Fréchet ノルムに持つ Fréchet 空間となる $(0<p\leqq\infty)$．更に $1\leqq p\leqq\infty$ なら $L_p(\mu)$ は Banach 空間であるが，一般に $0<p<1$ のときはそうではなく我々の所謂の縮約 Banach 空間にしかならない ([26])．単位円板 $\mathbb{D}$ の境界である円周 $\mathbb{T}:=\partial\mathbb{D}=\{e^{i\theta}:\theta\in\mathbb{R}=(-\infty,\infty)\}$ を基礎空間とし，$\mathbb{T}$ 上の Lebesgue 可測集合族 $\mathcal{L}$ 上の正規化角測度 $d\sigma(\theta)=(1/2\pi)d\theta$ による測度空間 $L_p(\mathbb{T},\mathcal{L},\sigma)=L_p(\sigma)$ を $\boldsymbol{L_p}$ $(0<p\leqq\infty)$ と略記し，$\mathbb{T}$ 上の Lebesgue 空間と言う．今一つ，自然数全体 $\mathbb{N}$ を基礎空間とし，その部分集合の全体 $2^{\mathbb{N}}$ の作る σ 代数上の測度 ν を，$\mathcal{S}\in 2^{\mathbb{N}}$ が有限 k 点集合なら $\nu(\mathcal{S})=k$, そうでないと $\nu(\mathcal{S})=\infty$ と定めた測度空間 $(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}},\nu)$ 上の Lebesgue 空間 $L_p(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}},\nu)$ を $\boldsymbol{l_p}$ $(0<p\leqq\infty)$ と記し，$\mathbb{N}$ 上の Lebesgue 空間と言う．

最後に，$\mathbb{D}$ の正則関数 f で，指数 $0<p\leqq\infty$ を与えるごとに，

$$\|f\|_{H_p}:=\sup_{0<r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p}<\infty, \tag{1.3}$$

但し $p=\infty$ のときは $\|f\|_{H_\infty}:=\sup_{0<r<1}\left(\max_{e^{i\theta}\in\mathbb{T}}|f(re^{i\theta})|\right)<\infty$, となる様な f の全体を $\boldsymbol{H_p}$ $(0<p\leqq\infty)$ と記し，$\mathbb{D}$ 上の **Hardy 空間**, 又は古典 Hardy 空間と呼ぶ ([6],[7],[10],[20] 等参照)．やはり $\|f\|_{H_p}$ $(0<p\leqq\infty)$ を f の $\boldsymbol{p}$**ノルム**と呼ぶが，$1\leqq p\leqq\infty$ のときは純正のノルムだけれど，$0<p<1$ では縮約ノルムではあるが通常のノルムではない．しかしやはり H_p $(0<p\leqq\infty)$ は $\|f\|_{H_p}^{p\wedge 1}$ を Fréchet ノルムとする Fréchet 空間となり ([5])，更に詳しくは 縮約 Banach 空間で ([26])，特に $1\leqq p\leqq\infty$ の場合は Banach 空間となる ([36])．こうして各 $0<p\leqq\infty$ に対して，3 種の位相線形空間 l_p, L_p, H_p が得られるが，これ等に関して，次の結果が成り立つ．これを**本論文の主定理**とする：

定理 1.4 (主定理). Hardy 空間 $\boldsymbol{H_p}$ は埋蔵関係の意味で Lebesgue 空間 $\boldsymbol{l_p}$ と $\boldsymbol{L_p}$ の中間に位置する：

$$\boldsymbol{l_p\hookrightarrow H_p\hookrightarrow L_p\quad(0<p\leqq\infty).} \tag{1.5}$$

上記二つの埋蔵関係の第二の $H_p\hookrightarrow L_p$ $(0<p\leqq\infty)$ は無論のこと周知以上のものである．事実，更に強く，すべての $0<p\leqq\infty$ で

$$H_p\subset L_p\quad(\text{線形閉部分空間}) \tag{1.6}$$

が成立するから，$H_p\hookrightarrow L_p$ は自明となる．H_p の関数 f は $\mathbb{T}$ に於いて殆ど到る所の $e^{i\theta}$ で非接境界値 $f(e^{i\theta})$ をもち，これにより得られる境界関数を $\hat{f}$ と記せば $\hat{f}\in L_p$ であって，$\|f\|_{H_p}=\left\|\hat{f}\right\|_{L_p}$ である．$f\in H_p$ に対する $\hat{f}$ の全体を $\hat{H}_p$ と記せば

$$\hat{H}_p=\left\{f\in L_p:\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(e^{i\theta})e^{in\theta}\,d\theta=0\ \ (n\in\mathbb{N})\right\}\subset L_p$$

であって，$\hat{H}_p$ は L_p の閉線形部分空間であり，$f\mapsto\hat{f}:H_p\to\hat{H}_p$ は等距離線形作用素であるから，H_p と $\hat{H}_p$ を同一視して，$f\in H_p$ は $\mathbb{D}$ 上の関数 $f(z)$ $(z\in\mathbb{D})$ と考えたり，$\mathbb{T}$ 上の関数 $f(e^{i\theta})$ $(e^{i\theta}\in\mathbb{T})$ と考えたり，自由に定義域が $\mathbb{D}$ と $\mathbb{T}$ を行き来出来る．この意味で (1.6) が成立すると考えるのである．

これに反して第一の埋蔵 $l_p\hookrightarrow H_p$ $(0<p\leqq\infty)$ は $p=\infty$ の場合 ([8] 参照) を除いて，文献上あまり目にしたことはなく，何が最も標準的な証明であるか分からないが，$p=\infty$ の場合に倣って，補間定理に基づく証明を試みる．$\Lambda=\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{D}$ 内の点列で，次の二条件をみたすとする：$z_n\neq z_m$ $(n\neq m)$；$\lim_{n\to\infty}|z_n|=1$．引用の便宜をはかって，以後この様な $\mathbb{D}$ 内の点列 $\Lambda=\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{D}$ 内の**許容点列**と呼ぶ．Λ に依存して測度空間 $(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}},\nu_\Lambda)$ を

$$\nu_\Lambda(\{k\})=\left(1-|z_k|^2\right)\cdot 1\quad(k\in\mathbb{N}) \tag{1.7}$$

で定め，Lebesgue 空間 $L_p(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}},\nu_\Lambda)$ を $\boldsymbol{l_p(\Lambda)}$ $(0<p\leqq\infty)$ と記す．従って $w\in l_p(\Lambda)$ は

$$\|w\|_{l_p(\Lambda)}:=\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(1-|z_k|^2\right)|w(k)|^p\right)^{1/p}<\infty\quad(0<p<\infty) \tag{1.8}$$

で特徴付けられる．但し $l_\infty(\Lambda)=l_\infty$ とする．$w\mapsto\hat{w}:l_p(\Lambda)\to l_p$ $(0<p\leqq\infty)$ を

$$\hat{w}(k)=\left(1-|z_k|^2\right)^{1/p}w(k)\quad(k\in\mathbb{N})$$

で与えると，$1/\infty = 0$ と解して，これは等距離線形作用素であるから，結局，どんな Λ に対しても

$$l_p(\Lambda) \approx l_p \quad (0 < p \leqq \infty) \tag{1.9}$$

となる．ここで更に Λ は**一様分離** (uniformly separated) なものばかりを考えることとする．これは Λ を零点集合とする Blaschke 積

$$B(z) = \prod_{j\in\mathbb{N}} \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}$$

が $\mathbb{D}\backslash\Lambda$ 上収束し，その上 $\Lambda\backslash\{k\}$ の Blaschke 積を

$$B_k(z) = \prod_{j\in\mathbb{N}\backslash\{k\}} \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}$$

と記すとき，条件

$$\delta := \inf_{k\in\mathbb{N}} |B_k(z_k)| > 0 \tag{1.10}$$

がみたされることを意味する．便宜上 (1.10) の量 δ を Λ の**一様分離示数**と呼ぶ，即ち Λ の一様分離性は $0 < \delta < 1$ と同値である．Newman の 1961 年の未公刊論文によれば，Λ が一様分離となる条件は，Λ の Blaschke 積 B について，十分小さな正数 ε に対し，$|B(z)| = \varepsilon$ は互いに交わらぬ Jordan 曲線からなり，夫々はただ一つの z_k を囲んでいる様になっていることである (Hoffman [13] 参照)．いかにも一様分離の言葉がぴったりする説明を与えているではないか．すると次の結果が成り立つ．

定理 1.11 (構成的補間定理)．Λ が一様分離である $\mathbb{D}$ 内の許容点列であると，各 $0 < p \leqq \infty$ に対して，関数列 $(F_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset H_p$ があって，δ_{mk} を Kronecker のデルタとするとき $F_m(z_k) = \delta_{mk}$ $(m, k \in \mathbb{N})$ となり，更に p と Λ の一様分離示数 δ のみに依存する定数 $C_p \geqq 1$ が定まって，任意の $w \in l_p(\Lambda)$ に対して

$$C_p^{-1} \|w\|_{l_p(\Lambda)} \leqq \left\| \sum_{m\in\mathbb{N}} w(m) F_m \right\|_{H_p} \leqq C_p \|w\|_{l_p(\Lambda)}. \tag{1.12}$$

これは直接的には，$0 < p \leqq 1$ の場合は V. Kabaĭla ([15],[16]), $1 < p < \infty$ の場合は P. Schuster–K. Seip ([34]), $p = \infty$ の場合は，P. Beurling (Carleson [3] 参照) によって得られたものであるが，背影的には大勢の人々の関与，特に，第一に L. Carleson ([4])，第二に H. S. Shapiro–A. L. Shields ([35]) の創始的決定的研究に始まり，多くの様々な研究が支えとなっている．$w \mapsto \sum_{m\in\mathbb{N}} w(m) F_m$ が $l_p(\Lambda) \hookrightarrow H_p$ を与え，それと (1.9) より $l_p \hookrightarrow H_p$ が得られる訳であるので，上記定理 1.11 を確立することが我々の主定理である定理 1.4 の主張を保証することになる．この故に定理 1.11 の証明は無論のこと H_p の補間定理を総合的に詳述することが本論文の副次的目的であると同時に実体である．

本節 1，序論，の締め括りとして，主定理 1.4 の応用例を一つ述べる．Hardy 空間 H_p $(0 < p \leqq \infty)$ は Lebesgue 空間 L_p $(0 < p \leqq \infty)$ 同様縮約 Banach 空間 ($1 \leqq p \leqq \infty$ なら無論純正の Banach 空間) を作り，又型・余型理論 1) (例えば [1] 参照) は Banach 空間を超えて縮約 Banach 空間迄拡張されることを我々は前著 [26] で論じた．縮約 Banach 空間 X と Y に対して，夫々の optimal な意味での型及び余型を $\tau(X), \tau(Y)$ 及び $\gamma(X), \gamma(Y)$ と記せば，**型・余型の単調性**：$X \hookrightarrow Y$ ならば $\tau(X) \geqq \tau(Y)$ 及び $\gamma(X) \leqq \gamma(Y)$，となる事を示した ([26] 参照)．かくの如く型・余型は位相線形空間論的不変量であり，従って Hardy 空間 H_p $(0 < p \leqq \infty)$ の型・余型の決定は重要であるばかりでなく極めて有用な筈である．次の結果は我々の主定理 1.4 と上述の型・余型の単調性から直ちに従う．

---

1) Khintchine-Kolmogoroff [19] による Rademacher の定理 [32] の完成等に見られる様に，符号列に関する Rademacher の研究は Rademacher 関数に結実し，それが解析学の広い分野で重要な役割を演ずる Khintchine の不等式 [18] (Littlewood [21], Khane [17] 等も参照) につながった．これに基づき Orlicz [29, 30] と Nordlander [28] による L_p 空間 $(1 \leqq p < \infty)$ の基本構造不等式が確立された．これらの本質的部分に着目する一般 Banach 空間の不変量として Banach 空間の型・余型理論が 1974 年 J. Hoffman-Jϕrgensen [14] により産み出され，その基本性質の研究が 1976 年 B. Maurey-G. Pisier [23] (B. Maurey 自身の報文 [22], F. Albiac-N. I. Kalton の教科書 [1] 等も参照) により出版されている．L_p 空間 $(0 < p < 1)$ も含む縮約 Banach 空間 ([26] 参照) 迄型・余型理論を拡張出来ることを 2013 年の上記論文 [26] で示した．勿論そこでは，Banach 空間である L_p 空間 $(1 \leqq p < \infty)$ の基本構造不等式を，非 Banach 空間ながら縮約 Banach 空間ではある L_p 空間 $(0 < p < 1)$ に迄拡張出来ることを示している．

定理 1.13 (Hardy 空間の型・余型決定定理). **位数 $0 < p \leqq \infty$ の Hardy 空間 H_p の optimal な意味での型及び余型を $\tau(H_p)$ 及び $\gamma(H_p)$ とするとき**
(a) $0 < p < \infty$ に対しては $(\tau(H_p), \gamma(H_p)) = (\min\{p, 2\}, \max\{p, 2\})$;
(b) $p = \infty$ に対しては $(\tau(H_\infty), \gamma(H_\infty)) = (1, \infty)$.

勿論，上の結果は，我々の前著 [26] で得た結果，$(\tau(L_p(\mu)), \gamma(L_p(\mu))) = (\min\{p,2\}, \max\{p,2\})$ $(0 < p < \infty)$ かつ $(\tau(L_\infty(\mu)), \gamma(L_\infty(\mu))) = (1, \infty)$, を既知としている，即ち $(\tau(L_p), \gamma(L_p)) = (\tau(l_p), \gamma(l_p)) = (\min\{p,2\}, \max\{p,2\})$ $(0 < p < \infty)$ と $(\tau(L_\infty), \gamma(L_\infty)) = ((\tau(l_\infty), \gamma(l_\infty)) = (1, \infty)$ と言う，上記定理の (a), (b) の対応物が L_p にも l_p $(0 < p \leqq \infty)$ にも同様に成立するのである．型・余型の不変性から $(\tau(X), \gamma(X)) \neq (\tau(Y), \gamma(Y))$ ならば $X \not\approx Y$ が，二つの縮約 Banach 空間 X と Y に対して結論出来る．こうして [26] では，$L_p(\mu)$ の型・余型の決定を利用して，**Orlicz の定理の一般化**：$L_p(\mu) \approx L_q(\mu)$ $(0 < p, q \leqq \infty)$ は $p = q$ と同値，(元々の Orlicz の定理 ([30]) は，$L_p \approx L_q$ $(1 \leqq p, q < \infty) \Leftrightarrow p = q$) を導いた ([25] も参照)．従って同様の思想で，定理 1.4 の応用である定理 1.13 の応用として，次の結果を得る．

定理 1.14 (Hardy 空間の Orlicz 型同型定理). **指数 $0 < p, q \leqq \infty$ に対して，$H_p \approx H_q$ となる必要十分条件は $p = q$ となることである．**

関数の定義領域を単位円板 $\mathbb{D}$ から一般の平面領域，或いは，Riemann 面 R へ一般化することで，古典的 Hardy 空間 H_p $(0 < p \leqq \infty)$, 即ち，$\mathbb{D}$ 上の Hardy 空間 $H_p = H_p(\mathbb{D})$ $(0 < p \leqq \infty)$ を R 上の Hardy 空間 $H_p(R)$ $(0 < p \leqq \infty)$ へ一般化した場合の $H_p(R)$ ([31],[12],[9],[10] 等参照) の型と余型と R の等角構造との係わりの研究は今後の重要な課題と著者等は信ずる．実は最も幸せな状況は $p = \infty$ の場合に現れた．即ち，

(α) $R \notin \mathcal{O}_{AB}$ ならば $(\tau(H_\infty(R)), \gamma(H_\infty(R))) = (1, \infty)$;
(β) $R \in \mathcal{O}_{AB}$ ならば $(\tau(H_\infty(R)), \gamma(H_\infty(R))) = (2, 2)$

と決定出来るのである (Nakai [24] 参照)，ここで $\mathcal{O}_{AB}$ は Liouville 型の Riemann 面 R の全体，即ち $H_\infty(R) = \mathbb{C}$ となる Riemann 面 R の族である ([33])．こうして $H_\infty(R)$ に対しては決定的で完全無欠な結果が得られている．これに対応する所が $H_p(R)$ $(0 < p < \infty)$ に対してどうなるかである．しかし $0 < p < \infty$ の $H_p(R)$ の場合は大変に複雑怪奇で，暫くは特殊例を数多く様々な見地から，多分闇雲に足掻くように研究をするという苦しい時期を，長短は分からないが，避けることは出来ないであろう．我々の今後の課題の一つとする．

2. Hardy 空間の補間点列

$\mathbb{D}$ 内の許容点列 $\Lambda = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ と指数 $0 < p \leqq \infty$ を定める．$w_k = w(k)$ $(w \in l_p(\Lambda))$ で与えられる $\mathbb{C}$ の値列 $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ を任意にとって

$$f(z_k) = w_k \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{2.1}$$

となるような $f \in H_p$ を求めるという補間問題を考える．$w \in l_p(\Lambda)$ をどのようにとっても (2.1) が解を持つような Λ は如何なるものか，このようになる Λ のみたすべき必要十分条件は何であるかを問うのである．各 $f \in H_p$ に対して

$$T_p f(z_k) := \left(1 - |z_k|^2\right)^{1/p} f(z_k) \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{2.2}$$

で決まる線形作用素 $T_p := H_p \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ を考える．各 $f \in H_p$ に対して (2.1) で定まる w_k $(k \in \mathbb{N})$ の定める $w \in l_p(\Lambda)$ であり，逆に各 $w \in l_p(\Lambda)$ の定める w_k $(k \in \mathbb{N})$ に対して (2.1) で定まる $f \in H_p$ が求まるという条件は

$$T_p(H_p) = l_p \tag{2.3}$$

である．そこで **Hardy 空間 H_p $(0 < p \leqq \infty)$ の補間問題** は (2.3) の形に集約出来る．そして，(2.3) となる為の $\Lambda = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ のみたすべき必要十分条件は何かに答えるのが **Hardy 空間 H_p の補間定理**である．これは本質的な意味では，原理的には $p = \infty$ に対する L. Carleson [4]，及び一般化としての $0 < p \leqq \infty$ に対する H. P. Shapiro–A. L. Shields [35] により次のように与えられた．

定理 2.4 (Hardy 空間の補間定理). **一つの従ってすべての $0 < p \leqq \infty$ に対して $T_p(H_p) = l_p$ となる為の必要十分条件は，$\Lambda = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が一様分離となることである．**

本定理証明の技術的な心臓部は，しばしば Carleson の埋蔵定理と呼ばれる，所謂重層点賦値のノルム評価にある．Carleson 等による現在標準的となっている証明より簡単手短かと思われる Neville によるものを以下最初の小節 2.1 で詳述する．次いで上記定理，即ち，Λ の一様分離性 $\Leftrightarrow T_p(H_p) = l_p\ (0 < p \leqq \infty)$，の証明を最後の小節 2.2 で完結する．

2.1. 一重及び多重点賦値のノルム評価. Hardy 空間の補間定理 (定理 2.4) や構成的補間定理 (定理 1.11) の為には是非必要でもある H_p の点賦値評価定理を導く．先ず一重の場合から始める．点 $z \in \mathbb{D}$ を留めたとき，$f \mapsto f(z) : H_p \to \mathbb{C}$ が**点賦値**と呼ばれる H_p 上の有界線形汎関数である．次の評価が得られる．

定理 2.1.1 (一重賦値評価). 任意の $z \in \mathbb{D}$ と任意の $f \in H_p$ $(0 < p \leqq \infty)$ に対して

(2.1.2)
$$\boldsymbol{\left(1 - |z|^2\right)^{1/p} |f(z)| \leqq \|f\|_{H_p}.}$$

証明 : $p = \infty$ の場合には $1/p = 0$ と解するのは当然であるが，そうならば，上の (2.1.2) は $|f(z)| \leqq \sup_{\mathbb{D}} |f| = \|f\|_{H_\infty}$ 故自明となり，だから $0 < p < \infty$ の場合のみを考えたらよい．最初 $p = 2$ として，(2.1.2) の $p = 2$ の場合を導く．Cauchy の積分公式より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z}\, de^{i\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z}\, e^{i\theta}\, d\theta$$

である．両辺の絶対値をとって評価すると

$$|f(z)| \leqq \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{|e^{i\theta} - z|} \cdot \left|f(e^{i\theta})\right| \frac{d\theta}{2\pi}$$

が得られる．両辺を 2 乗して，右辺の積分に Schwarz の不等式を適用すると

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &\leqq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{|e^{i\theta} - z|^2}\, d\theta\right) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(e^{i\theta})|^2\, d\theta\right) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}\, d\theta\right) \cdot \frac{\|f\|_{H_2}^2}{1 - |z|^2} \end{aligned}$$

となる．最右辺の第 1 因子は定数関数 1 の境界値の Poisson 積分故 1 であるから $\left(1 - |z|^2\right)|f(z)|^2 \leqq \|f\|_{H_2}^2$ が得られ，両辺の平方根をとって，(2.1.2) の $p = 2$ の場合が得られる．

次に一般の $0 < p < \infty$ の場合 $f \in H_p$ の零点より作る Blaschke 積を B とれれば $g := f/B$ は零点を持たぬ H_p の元となる．しかも

$$\left\|g^{p/2}\right\|_{H_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left|g^{p/2}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(e^{i\theta})|^p\, d\theta = \|g\|_{H_p}^p < \infty$$

より $g^{p/2} \in H_2$ であるから，既に示したところにより

$$\left(1 - |z|^2\right)^{1/2} \left|g^{p/2}(z)\right| \leqq \left\|g^{p/2}\right\|_{H_2}$$

となる．$\left\|g^{p/2}\right\|_{H_2}^2 = \|g\|_{H_p}^p$ であったから上の右辺を $\|g\|_{H_p}^{p/2}$ で置き換えて $\left(1 - |z|^2\right)^{1/2} |g(z)|^{p/2} \leqq \|g\|_{H_p}^{p/2}$ となる．両辺を $2/p$ 乗すると

(2.1.3)
$$\left(1 - |z|^2\right)^{1/p} |g(z)| \leqq \|g\|_{H_p}$$

となる．さて

$$|f(z)| = |(Bg)(z)| = |B(z)||g(z)| \leqq |g(z)|$$

であるし，又 $\mathbb{T}$ 上 a.e. に $|B(e^{i\theta})| = 1$ だから

$$\|f\|_{H_p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |B(e^{i\theta})|^p |g(e^{i\theta})|^p\, d\theta\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(e^{i\theta})|^p\, d\theta\right)^{1/p} = \|g\|_{H_p}$$

となる．この結果を (2.1.3) と合わせることにより (2.1.2) が導かれる．　□

$\mathbb{D}$ 内に有限 n 個の点 $z_1, \cdots, z_n$ を取るとき，誠に自明の極みながら，(2.1.2) より直ちに，各 $f \in H_p$ $(0 < p < \infty)$ に対し

$$\sum_{k=1}^{n} \left(1 - |z_k|^2\right) |f(z_k)|^p \leqq n \, \|f\|_{H_p}^p \tag{2.1.4}$$

となる．(2.1.2) を一重点賦値のノルム評価と言えば，上の (2.1.4) は多重点賦値のノルム評価とでも言うもので，$\|f\|_{H_p}$ の係数 n は最善である．次いで $\mathbb{D}$ 内の許容点列 $\Lambda = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ に対しての無限多重点賦値のノルム評価，即ち，どんな $f \in H_p$ $(0 < p < \infty)$ に対しても

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(1 - |z_k|^2\right) |f(z_k)|^p \leqq \beta_\Lambda \, \|f\|_{H_p}^p \tag{2.1.5}$$

となると言う不等式を考えてみよう．(2.1.4) から，大抵の場合 $\beta_\Lambda = \infty$ であろう．Λ を上手くとって $\beta_\Lambda < +\infty$ にすることもあまり容易とは思えない．第一，一つでも存在するかと言われても即答は難しいのではあるまいか．それ故，$\beta_\Lambda < +\infty$ となる為の Λ のみたすべき必要十分条件は何かという問は相当に格調高い興味深いものである．この方向に資する重要な寄与として，Λ が一様分離であると $\beta_\Lambda < \infty$ となると言う Carleson の埋蔵定理と呼ばれているものを述べる．β_Λ は Λ のみに依存し $0 < p < \infty$ には無関係である．

定理 2.1.6 (Carleson の埋蔵定理). **$\mathbb{D}$ 内の許容点列 $\Lambda = \{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ が一様分離であると，Λ のみに依存する定数 $0 < \beta < \infty$ があって，すべての $f \in H_p$ $(0 < p < \infty)$ に対して**

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \left(1 - |z_j|^2\right) |f(z_j)|^p \leqq \beta \, \|f\|_{H_p}^p \tag{2.1.7}$$

が成り立つ．β としては，より具体的には，Λ の一様分離示数を $0 < \delta \leqq 1$ とするとき

$$\beta = 32/\delta^4 \tag{2.1.8}$$

にとることが出来る．

各 $0 < p \leqq \infty$ をとめる毎に，定義域が Λ を含む関数に f に

$$(T_p f)(k) = \left(1 - |z_k|^2\right)^{1/p} f(z_k) \quad (k \in \mathbb{N})$$

で定める $\mathbb{N}$ 上の関数 $T_p f$ を考えると作用素 $T_p : f \mapsto T_p f$ が定まるが (2.1.7) は T_p が H_p から l_p への連続作用素，即ち H_p が l_p に広い意味で埋蔵されることを意味すると解釈して，埋蔵定理と上の定理 2.1.6 を呼ぶのであろう．Carleson により与えられたこの結果の誠に明快簡潔で鮮やかな証明を C. W. Neville [27] に従って詳述する．実際 Carleson の原証明より “手短” であると Neville は主張している．現論文の第 1 著者の恩師の一人で物故されて久しい元学習院大の大津賀信先生は，数学指導の中で時に触れ折に触れ数少なからぬ独自の箴言や警句で大勢の弟子や後輩達を啓発されたが，その御箱の一つに「簡単な別証や，解り易い別証や，手短な別証」等と言う文言を使う文書に接したら，必ずその「著者にとって」と言う言葉が常に省略されているものと考えよ，と言うのがあった．又第 1 著者に対して長年共同研究の機会を用意する等と言う方法で，常に鞭撻指導いたゞいた，これも故人となった函数論の大先輩である元 UCLA の Leo Sario 教授は，数学では事実の発見や指摘が本質的で，それが正しいことに確信が持てるなら，二次的な技術に過ぎぬ証明や，ましてやその別証など何の意味もない，と何時も言っておられたことを屡々思い出す．それでも，我々にとっては，短い，解り易い，又簡単な証明は，とにかく有り難い．

これから Carleson の埋蔵定理 2.1.6 の証明に入るが，その為必要となる準備的考察を少々行う．先ず $\mathbb{D}$ 上の 1 位の Poincaré 型の重み付 Lebesgue 測度 $\left(1 - |z|^2\right) dxdy$ $(z = x + iy)$ による指数 2 の **Bergman 空間 $A_{2,1}$** が必要である．これは $\mathbb{D}$ 上の正則関数 f で，その $A_{2,1}$ ノルム $\|f\|_{A_{2,1}}$ が有限なもの全体の作る Banach 空間 (実は，Hilbert 空間) である．ここに f の $A_{2,1}$ ノルム $\|f\|_{A_{2,1}}$ は

$$\|f\|_{A_{2,1}}^2 := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \left(1 - |z|^2\right) dxdy \leqq \infty$$

と定める．$\mathbb{D}$ 上の正則関数 f の Taylor 展開を $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ $(z=re^{i\theta})$ とすると

$$\|f\|_{H_2}^2=\left\|\sum_{n=0}^{\infty}c_ne^{in\theta}\right\|_{L_2}^2=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left|\sum_{n=0}^{\infty}c_ne^{in\theta}\right|^2d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 \tag{2.1.9}$$

であり，又一方

$$\|f\|_{A_{2,1}}^2=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}\left|\sum_{n=0}^{\infty}c_nr^ne^{in\theta}\right|^2(1-r^2)r\,drd\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}|c_n|^2 \tag{2.1.10}$$

である．特に f の導関数 $f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}nc_nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}z^n$ については

$$\|f'\|_{A_{2,1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}(n+1)^2|c_{n+1}|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}|c_{n+1}|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}|c_n|^2 \tag{2.11}$$

となる．(2.1.11) と (2.1.9) を較べると，すべての $\mathbb{D}$ 上の正則関数 f について

$$\|f'\|_{A_{2,1}}^2\leqq\|f\|_{H_2}^2\leqq|f(0)|^2+2\|f'\|_{A_{2,1}}^2 \tag{2.1.12}$$

となっている．変な記号であるが，$(H_2)':=\{f':f\in H_2\}$ と記すと

$$A_{2,1}=(H_2)' \tag{2.1.13}$$

となる．事実，(2.1.12) の第一の不等式により，$A_{2,1}\supset(H_2)'$ がわかる．任意の $F\in A_{2,1}$ をとり，$f(z)=\displaystyle\int F(z)\,dz$ と置くと，$f'=F\in A_{2,1}$ だから，(2.1.12) の第二の不等式により $f\in H_2$ がわかる．よって $F=f'\in(H_2)'$ となり $A_{2,1}\subset(H_2)'$ も正しくて，(2.1.13) がでる．

$\mathbb{D}$ の 2 点 a_1,a_2 について，その 2 点間の**擬双曲的距離** $\rho(a_1,a_2)$ は

$$\rho(a_1,a_2):=\left|\frac{a_1-a_2}{1-\bar{a}_1a_2}\right|$$

で与えられる．この距離による $\mathbb{D}$ 上の幾何が一つの非 Euclid 幾何である．$\mathbb{D}$ を不変とする一次変換 τ の全体の作る群を $\mathscr{G}$ とするとき，ρ は $\mathscr{G}$ 不変，即ち，

$$\rho(\tau(a_1),\tau(a_2))=\rho(a_1,a_2)\quad(\tau\in\mathscr{G}) \tag{2.1.14}$$

となることは簡単な直接計算で確かめられる超基本事項である．これを使って $a\in\mathbb{D}$ 中心半径 $0<r<1$ の非 Euclid 円板

$$B(a,r):=\{z\in\mathbb{D}:\rho(z,a)<r\}$$

を調べる．$a\in\mathbb{D}$ 中心半径 $0<r<1-|a|$ の Euclid 円板

$$D(a,r):=\{z\in\mathbb{D}:|z-a|<r\}$$

との関係で $B(a,r)$ の大きさを見る．先ず $z\in B(a,r)$ をとると $\rho(z,a)<r$ である．$\tau(0)=0$ となる $\tau\in\mathscr{G}$ をとると $\rho(\tau(z),\tau(a))=\rho(z,a)<r$ 故

$$|\tau(z)-0|=\left|\frac{\tau(z)-0}{1-\bar{0}\tau(z)}\right|=\left|\frac{\tau(z)-\tau(a)}{1-\overline{\tau(a)}\tau(z)}\right|=\rho(\tau(z),\tau(a))=\rho(z,a)<r$$

だから $\tau(z)\in D(0,r)$, 即ち $\tau(B(a,r))\subset D(0,r)$ である．逆に $\zeta\in D(0,r)$ としたら $|\zeta|<r$ である．上の $\tau\in\mathscr{G}$ に対し

$$\rho(\tau^{-1}(\zeta),a)=\rho(\tau^{-1}(\zeta),\tau^{-1}(0))=\rho(\zeta,0)=|\zeta|<r$$

だから $\tau^{-1}(\zeta)\in B(a,r)$, 従って $\zeta\in\tau(B(a,r))$ である．よって $D(0,r)\subset\tau(B(a,r))$ である．故に

$$\tau(B(a,r))=D(0,r) \tag{2.1.15}$$

となる．$\tau^{-1}\in\mathscr{G}$ の円々対応性により，$B(a,r)=\tau^{-1}(D(0,r))$ はとにかく或る Euclid 円板である．さて，$0<r<1$ として Euclid 円板 $D(a,(r/2)(1-|a|^2))$ を，上と同様 $\tau(a)=0$ である $\tau\in\mathscr{G}$ で写したときの像について

$$\tau\left(D\left(a,\frac{r}{2}\left(1-|a|^2\right)\right)\right)\subset D(0,r)=\tau(B(a,r)) \tag{2.1.16}$$

となっていることを見よう．$\partial D(a,(r/2)(1-|a|^2))$ の点 $\zeta=a+(r/2)(1-|a|^2)e^{i\theta}$ $(e^{i\theta}\in\mathbb{T})$ の像 $\tau(\zeta)$ の全体

$$\tau\left(\partial D\left(a,\frac{r}{2}\left(1-|a|^2\right)\right)\right)=\partial\left(\tau\left(D\left(a,\frac{r}{2}\left(1-|a|^2\right)\right)\right)\right)$$

は円周であり，又 $\tau(a)=0$ だから，$0\in\tau(D(a,(r/2)(1-|a|^2)))$ であり，上のような ζ についての $|\tau(\zeta)-0|$ の最大値をみると

$$\begin{aligned}|\tau(\zeta)-0|=|\tau(\zeta)|&=\left|\frac{\left(a+\frac{r}{2}\left(1-|a|^2\right)e^{i\theta}\right)-a}{1-\bar a\left(a+\frac{r}{2}\left(1-|a|^2\right)e^{i\theta}\right)}\right|=\left|\frac{r\left(1-|a|^2\right)e^{i\theta}}{2-2|a|^2-\bar a r\left(1-|a|^2\right)e^{i\theta}}\right|\\&=\left|\frac{r\left(1-|a|^2\right)e^{i\theta}}{\left(1-|a|^2\right)\left(2-\bar a re^{i\theta}\right)}\right|=\frac{r}{|2-\bar a re^{i\theta}|}\leqq\frac{r}{2-|a|r}<r\end{aligned}$$

である．従って (2.1.16) が確かめられた．これから無論のこと

$$D\left(a,\frac{r}{2}\left(1-|a|^2\right)\right)\subset B(a,r) \tag{2.1.17}$$

が従う．

補題 2.1.18. $\mathbb{D}$ 内の点列 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ は或る定数 $0<\alpha<1$ があって条件

$$\boldsymbol{\rho(a_j,a_k)=\left|\frac{a_j-a_k}{1-\bar a_k a_j}\right|\geqq\alpha\quad(j,k\in\mathbb{N},j\neq k)} \tag{2.1.19}$$

を満足するとする．しからばすべての $f\in A_{2,1}$ に対して

$$\boldsymbol{\sum_{j\in\mathbb{N}}\left(1-|a_j|^2\right)^3|f(a_j)|^2\leqq\frac{32}{\alpha^2}\|f\|^2_{A_{2,1}}}. \tag{2.1.20}$$

証明 : a 中心の Euclid 及び非 Euclid 円板の包含関係 (2.1.17) を $r=\alpha/2$ で利用するのに，簡単の為 $s_j:=(\alpha/4)(1-|a_j|^2)$ $(j\in\mathbb{N})$ とおくと

$$D(a_j,s_j)=D\left(a_j\frac{\alpha}{4}\left(1-|a_j|^2\right)\right)\subset B\left(a_j,\frac{\alpha}{2}\right) \tag{2.1.21}$$

である．さて，$j\neq k$ なら $B(a_j,\alpha/2)\cap B(a_k,\alpha/2)=\emptyset$ である．もしこれが共通点 z を持つならば，$\rho(a_j,z)<\alpha/2$ かつ $\rho(a_k,z)<\alpha/2$ であるから

$$\rho(a_j,a_k)\leqq\rho(a_j,z)+\rho(z,a_k)<\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}=\alpha$$

でなければならぬ．しかし (2.1.19) によれば $\rho(a_j,a_k)\geqq\alpha$ だから $B(a_j,\alpha/2)\cap B(a_k,\alpha/2)=\emptyset$ $(j\neq k)$ が結論される．よって (2.1.21) より

$$D(a_j,s_j)\cap D(a_k,s_k)=\emptyset\quad(j\neq k)$$

となる．円板 $D(a_j,s_j)$ の面積 $|D(a_j,s_j)|$ は

$$|D(a_j,s_j)|=\pi s_j^2=\pi\left(\frac{\alpha}{4}\left(1-|a_j|^2\right)\right)^2=\frac{\pi\alpha^2\left(1-|a_j|^2\right)^2}{16}$$

である．さて，$|f(z)|^2=|f^2(z)|$ は劣調和関数だから，劣面積平均定理により

$$|f(a_j)|^2\leqq\frac{1}{|D(a_j,s_j)|}\int_{D(a_j,s_j)}|f(z)|^2\,dxdy=\frac{16}{\pi\alpha^2\left(1-|a_j|^2\right)^2}\int_{D(a_j,s_j)}|f(z)|^2\,dxdy$$

となる．従って

$$(1-|a_j|^2)^3\,|f(a_j)|^2 \leqq \frac{16}{\pi\alpha^2}\int_{D(a_j,s_j)} (1-|a_j|^2)\,|f(z)|^2\,dxdy \tag{2.1.22}$$

である．まず $\mathbb{D}$ の中心 0 と $D(a_j,s_j)$ の中心 a_j を通る直線上を 0 から出発して a_j を通過して進みそこで $\partial D(a_j,s_j)$ に交わる点を b_j とする．すると b_j は $\overline{D(a_j,s_j)}$ 内のどの点 z より $\partial\mathbb{D}$ に近いから $1-|z|^2 \geqq 1-|b_j|^2$ である．さて

$$|b_j| = |a_j| + s_j = |a_j| + \frac{\alpha}{4}\,(1-|a_j|^2) = |a_j| + \frac{\alpha}{2}\,(1-|a_j|)\,\frac{1+|a_j|}{2} \leqq |a_j| + \frac{\alpha}{2}\,(1-|a_j|)$$

であるから

$$1-|b_j| \geqq 1-\left(|a_j| + \frac{\alpha}{2}\,(1-|a_j|)\right) = (1-|a_j|)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \geqq \frac{1}{2}\,(1-|a_j|)$$

である．即ち $1-|b_j| \geqq (1-|a_j|)/2$ である．これと $1+|b_j| \geqq 1+|a_j|$ を辺々掛け合わせて $2(1-|b_j|^2) \geqq 1-|a_j|^2$ である．よって，$(1-|z|^2) \geqq (1-|b_j|^2)$ $(z\in D(a_j,s_j))$ だから $2(1-|z|^2) \geqq 1-|a_j|^2$ $(z\in D(a_j,s_j))$ である．故に (2.1.22) の右辺の積分中の $1-|a_j|^2$ を $2(1-|z|^2)$ で置き換えて

$$\begin{aligned}(1-|a_j|^2)^3\,|f(a_j)|^2 &\leqq \frac{16}{\pi\alpha^2}\int_{D(a_j,s_j)} 2\,(1-|z|^2)\,|f(z)|^2\,dxdy\\ &= \frac{32}{\pi\alpha^2}\int_{D(a_j,s_j)} |f(z)|^2\,(1-|z|^2)\,dxdy\end{aligned}$$

が得られる．これを $j\in\mathbb{N}$ について加えると，$\{D(a_j,s_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ が互いに素であるから

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{N}}(1-|a_j|^2)^3\,|f(a_j)|^2 &\leqq \frac{32}{\pi\alpha^2}\int_{\cup_{j\in\mathbb{N}}D(a_j,s_j)} |f(z)|^2\,(1-|z|^2)\,dxdy\\ \leqq \frac{32}{\pi\alpha^2}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2\,(1-|z|^2)\,dxdy &= \frac{32}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2\,(1-|z|^2)\,dxdy\right) = \frac{32}{\alpha^2}\,\|f\|_{A_{2,1}}^2\end{aligned}$$

となり，(2.1.20) の証明が完成する． □

Carleson の埋蔵定理 2.1.6 の証明：一様分離示数 $0<\delta\leqq 1$ の $\mathbb{D}$ 内の許容点列 $\Lambda=\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ に対して，$\beta=32/\delta^4$ とすると (2.1.7) が成り立つことを示す．その為に補題 2.1.18 が本質的に適用される．そこに於ける $\mathbb{D}$ 内の点列 $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ として，$\Lambda=\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ を使う．Λ の Blaschke 積を B, 各 $k\in\mathbb{N}$ に対する $\Lambda\backslash\{z_k\}$ の Blaschke 積を B_k とする．$j,k\in\mathbb{N}$ で $j\neq k$ とするとき

$$\rho(z_j,z_k) = \left|\frac{z_j-z_k}{1-\overline{z}_k z_j}\right| \geqq \prod_{j\in\mathbb{N}\backslash\{k\}}\left|\frac{z_j-z_k}{1-\overline{z}_k z_j}\right| = |B_k(z_k)| \geqq \delta$$

であるから，補題 2.1.18 に於いて $\alpha=\delta$ にとると，$\Lambda=\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ は条件 (2.1.19) をみたすことがわかるので，結論 (2.1.20) が $\Lambda=\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ に対して成り立つ．即ち，任意の $F\in A_{2,1}$ に対して

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}(1-|z_j|^2)^3|F(z_j)|^2 \leqq \frac{32}{\delta^2}\,\|F\|_{A_{2,1}}^2 \tag{2.1.23}$$

が成立する．さて最初任意の $f\in H_2$ をとる．直ぐ解るように $Bf\in H_2$ で $\|Bf\|_{H_2}=\|f\|_{H_2}$, 従って (2.1.12) や (2.1.13) より $(Bf)'\in A_{2,1}$ で $\|(Bf)'\|_{A_{2,1}} \leqq \|Bf\|_{H_2}$ である．$B(z)/(z-z_j)=B_j(z)/(1-\overline{z}_j z)$ で $z\to z_j$ として $B'(z_j)=B_j(z_j)/(1-|z_j|^2)$ となる．よって

$$|(Bf)'(z_j)| = |B'(z_j)f(z_j)| = (1-|z_j|^2)^{-1}\,|B_j(z_j)f(z_j)|$$

となり，$|f(z_j)|$ について解けば

$$|f(z_j)| = (1-|z_j|^2)|B_j(z_j)|^{-1}|(Bf)'(z_j)|$$

であるから，$|B_j(z_j)|^{-1} \leqq 1/\delta$ や $Bf =: F \in A_{2,1}$ 等を使うと

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \left(1-|z_j|^2\right)|f(z_j)|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |B_j(z_j)|^{-2}\left(1-|z_j|^2\right)^3 |(Bf)'(z_j)|^2 \leqq \frac{1}{\delta^2}\sum_{j\in\mathbb{N}} \left(1-|z_j|^2\right)^3 |(Bf)'(z_j)|^2$$
$$\leqq \frac{32}{\delta^4}\,\|(Bf)'\|^2_{A_{2,1}} \leqq \frac{32}{\delta^4}\,\|Bf\|^2_{H_2} = \frac{32}{\delta^4}\,\|f\|^2_{H_2}$$

となる．これは示すべき式 (2.1.7) の $p=2$ の場合である：

(2.1.24)
$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \left(1-|z_j|^2\right)|f(z_j)|^2 \leqq \frac{32}{\delta^4}\,\|f\|^2_{H_2} \quad (f \in H_2).$$

次に任意の $f \in H_p$ $(0<p<\infty)$ を取り，f の零点集合の Blaschke 積を b とし，$g := f/b$ と置くと $g \in H_p$ で $f = gb$ である．すると $g^{p/2} \in H_2$ だから (2.1.24) より

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \left(1-|z_j|^2\right)\left|g^{p/2}(z_j)\right|^2 \leqq \frac{32}{\delta^4}\left\|g^{p/2}\right\|^2_{H_2}$$

である．上の不等式の左辺について $\left|g^{p/2}(z_j)\right|^2 = |g(z_j)|^p$ であり，右辺については

$$\left\|g^{p/2}\right\|^2_{H_2} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left|g^{p/2}(e^{i\theta})\right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|g(e^{i\theta})|^p\,d\theta = \|g\|^p_{H_p}$$

だから上記不等式を書き換えて次の形を得る：

(2.1.25)
$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \left(1-|z_j|^2\right)|g(z_j)|^p \leqq \frac{32}{\delta^4}\,\|g\|^p_{H_p}.$$

こゝの g を $f = gb$ で置き換える為，$|b(z_j)| \leqq 1$ を使うと

$$|f(z_j)| = |g(z_j)b(z_j)| = |g(z_j)||b(z_j)| \leqq |g(z_j)|$$

となり，又 $\mathbb{T}$ 上 a.e. に $|b|=1$ であるから，

$$\|f\|^p_{H_p} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|g(e^{i\theta})b(e^{i\theta})|^p\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|g(e^{i\theta})|^p\,d\theta = \|g\|^p_{H_p}$$

である．これと (2.1.25) から

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \left(1-|z_j|^2\right)|f(z_j)|^p \leqq \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(1-|z_j|^2\right)|g(z_j)|^p \leqq \frac{32}{\delta^4}\,\|g\|^p_{H_p} = \frac{32}{\delta^4}\,\|f\|^p_{H_p},$$

即ち，任意の $f \in H_p$ $(0<p<\infty)$ に対して (2.1.7) が $\beta = 32/\delta^4$ で成立する． □

2.2. Hardy 空間の補間定理の証明. $T_p(H_p) = l_p$ $(0 < p \leqq \infty)$ が成立する為には，与えられた $\mathbb{D}$ 内の許容点列 $\Lambda = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様分離となることが必要十分条件であると言うのが証明対象作業の定理 2.4 で，従って $T_p(H_p) = l_p$ なら Λ は一様分離であること（必要条件）と Λ が一様分離なら $T_p(H_p) = l_p$ となること（十分条件）の二つの証明をすることになる．しかし内容をもっと詳しくみると

(a) 或る $0 < p \leqq \infty$ で $T_p(H_p) = l_p$;
(b) 全ての $0 < p \leqq \infty$ で $T_p(H_p) = l_p$;
(c) Λ は一様分離,

の 3 条件があって，これら 3 条件が互いに同値であると言うのが勿論補間定理 2.4 の眞の主張である．従って (a) ⇒ (c) ⇒ (b) ⇒ (a) のサイクルで同値性が保証される訳である．しかし (b) ⇒ (a) は自明故 (a) ⇒ (c) と (c) ⇒ (b) を示せばよく，(a) ⇒ (c) は上で述べる必要性証明，(c) ⇒ (b) は十分性証明と解してよい．以下最初に与える必要条件の証明は自己完結である．しかし十分条件の証明 (c) ⇒ (b) には，構成的補間問題 (定理 1.11) を使うので，この時点では自己完結でない．勿論，後節 3 で定理 1.11 の証明を与えることが，本論文の主目的なので，最終的には自己完結となる．

必要条件: どれか一つの $0 < p \leqq \infty$ に対して $T_p(H_p) = l_p$ となるならば，$\Lambda = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様分離:$\delta := \inf_{k\in\mathbb{N}} |B_k(z_k)| > 0$ となることを示したい．この部分はどちらかと言えば，軟弱な部分で，Hardy 空間 H_p $(0 < p \leqq \infty)$ が，Fréchet 空間で

あるから，関数解析学の基本三原理 (即ち，一様有界原理，開写像原理，拡張原理) 中の前二者，特に開写像原理，が H_p $(0<p\leqq\infty)$ に対して成り立つことに本質がある．さて $T_p(H_p)=l_p$ を仮定する．このとき作用素 $T_p:H_p\to l_p$ は有界線形作用素であることを示す．この事だけなら，$T_p(H_p)=l_p$ より弱く，$T_p(H_p)\subset l_p$ の仮定だけでよい．先ず T_p は有界性より弱く，閉線形作用素となることを言う．その為

$$f_n\in H_p,\quad f_n\to f\quad \text{かつ}\quad T_pf_n=v_{f_n}\to v\in l_p$$

とする．ここで $v_{f_n}(k)=\left(1-|z_k|^2\right)^{1/p}f_n(z_k)$ $(k\in\mathbb{N})$ である．l_p 内 $v_{f_k}\to v$ ならば各 $k\in\mathbb{N}$ につき $v_{f_n}(k)=\left(1-|z_k|^2\right)^{1/p}f_n(z_k)\to v(k)=\left(1-|z_k|^2\right)^{1/p}w(k)$ $(w\in l_p(\Lambda))$ より，H_p 内 $f_n\to f$ だから，特に，$f_k(z_k)\to f(z_k)$ となるから $w(k)=f(z_k)$ で $v(k)=\left(1-|z_k|^2\right)^{1/p}f(z_k)$ だから，$v=T_pf$ で，l_p 内 $T_pf_n\to T_pf$ となる．これは T_p が閉であることを示す．よって閉グラフ定理より，Fréchet 空間 H_p と l_p の間の閉線形作用素 $T_p:H_p\to l_p$ は有界である．$T_p(H_p)=l_p$ である有界線形作用素 T_p の核

$$Z_p:=\{f\in H_p:f(z_k)=0\ (k\in\mathbb{N})\}=B_pH_p$$

(B_p は Z_p の Blaschke 積) による商空間 H_p/Z_p を考える．$f\in H_p$ を含む同値類 $f+Z_p$ を $\hat{f}$ と記そう．そこで

$$\|\hat{f}\|_{H_p/Z_p}:=\inf_{g\in\hat{f}}\|g\|_{H_p}$$

と定めると，$\|\hat{f}\|_{H_p/Z_p}$ は $\|f\|_{H_p}$ の場合と同様 H_p/Z_p に Fréchet 空間ノルム $\|\hat{f}\|_{H_p/Z_p}^{p\wedge 1}$ $(p\wedge 1=\min\{p,1\})$ を与えて H_p/Z_p を Fréchet 空間にする．そこで

$$\hat{T}_p\hat{f}:=T_pf\quad (f\in\hat{f}) \tag{2.2.1}$$

により線形作用素 $\hat{T}_p:H_p/Z_p\to l_p$ を定める．これは明らかに良い定義である．しかも，任意の $f\in\hat{f}$ をとるとき

$$\|\hat{T}_p\hat{f}\|_{l_p}=\|T_pf\|_{l_p}\leqq\|T_p\|\,\|f\|_{H_p}$$

であるから，$f\in\hat{f}$ に関する $\|f\|_{H_p}$ の下限は $\|\hat{f}\|_{H_p/Z_p}$ であることにより，すべての $\hat{f}\in H_p/Z_p$ に対し

$$\|\hat{T}_p\hat{f}\|_{l_p}\leqq\|T_p\|\,\|\hat{f}\|_{H_p/Z_p} \tag{2.2.2}$$

だから，$\hat{T}_p:H_p/Z_p\to l_p$ は有界線形作用素で，勿論これは，全単射故，開写像原理により，$\hat{T}_p^{-1}:l_p\to H_p/Z_p$ は有界線形作用素である．そこで任意の $v\in l_p$ に対し $\hat{T}_p^{-1}v=\hat{f}\in H_p/Z_p$ とすると

$$\|\hat{f}\|_{H_p/Z_p}\leqq\|\hat{T}_p^{-1}\|\,\|v\|_{l_p} \tag{2.2.3}$$

である．これは $\hat{T}\hat{f}=v$ より (2.2.1) から，どんな $f\in\hat{f}$ を選んでも $\hat{T}_p\hat{f}=T_pf$ であるが，$\|\hat{f}\|_{H_p\setminus Z_p}=\inf_{f\in\hat{f}}\|f\|_{H_p}$ により，或る $f\in\hat{f}$ があって，(2.2.3) より

$$\|f\|_{H_p}\leqq 2\|\hat{T}_p^{-1}\|\,\|v\|_{l_p} \tag{2.2.4}$$

となる．無論 $T_pf=\hat{T}_p\hat{f}=v$ ((2.2.1) 参照) だから，結局，任意の $v\in l_p$ を与えるとき，或る $f\in H_p$ があって，$(T_pf)(k)=v(k)$ $(k\in\mathbb{N})$ より，$2\|\hat{T}_p^{-1}\|=:C$ として

$$\begin{cases}\left(1-|z_k|^2\right)^{1/p}f(z_k)=v(k) & (k\in\mathbb{N})\\ \|f\|_{H_p}\leqq C\,\|v\|_{l_p}\end{cases} \tag{2.2.5}$$

となるようにできる．従って各 $k\in\mathbb{N}$ に対して $f_k\in H_p$ で，$\|f_k\|_{H_p}\leqq C$ かつ

$$f_k(z_j)=\left(1-|z_j|^2\right)^{-1/p}\delta_{kj}\quad (j\in\mathbb{N})$$

となるものが取れる．次いで各 $n>k$ $(n\in\mathbb{N})$ に対して

$$F_{nk}(z):=f_k(z)\prod_{j\neq k}^{1,\cdots,n}\frac{1-\bar{z}_jz}{z-z_j} \tag{2.2.6}$$

とおくと，$F_{nk} \in H_p$ で $\|F_{nk}\|_{H_p} = \|f_k\|_{H_p} \leqq C$ である．そこで (2.2.6) で $z = z_k$ とおくと

$$F_{nk}(z_k) = f_k(z_k) \prod_{j \neq k}^{1,\cdots,n} \frac{1 - \bar{z}_j z_k}{z_k - z_j}$$

で $f_k(z_k) = \left(1 - |z_k|^2\right)^{-1/p}$ だから，定理 2.1.1 の (2.1.2) を使って

$$\left| \prod_{j \neq k}^{1,\cdots,n} \frac{1 - \bar{z}_j z_k}{z_k - z_j} \right| = \left(1 - |z_k|^2\right)^{1/p} |F_{nk}(z_k)| \leqq \|F_{nk}\|_{H_p} \leqq C$$

となる．これはすべての $n \in \mathbb{N}$ $(n > k)$ で正しいから $|1/B_k(z_k)| \leqq C$ となり

$$\delta = \inf_{k \in \mathbb{N}} |B_k(z_k)| \geqq \frac{1}{C} > 0$$

である．かくて，どれかの $0 < p \leqq \infty$ で $T_p(H_p) = l_p$ ならば，$\Lambda = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ は一様分離となることの証明が完結する．

十分条件： $\Lambda = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が一様分離ならば，すべての $0 < p \leqq \infty$ に対し $T_p(H_p) = l_p$ となることを示したい．その為に，$T_p(H_p) \subset l_p$ 及び $T_p(H_p) \supset l_p$ 夫々の証明を与える．最初任意の $f \in H_p$ をとるとき，$T_p f(k) = \left(1 - |z_k|^2\right)^{1/p} f(z_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ であるので，$p = \infty$ ならば，$f \in H_\infty$ で $T_\infty f(k) = f(z_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ より

$$\|T_\infty f\|_{l_\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |f(z_k)| \leqq \|f\|_{H_\infty} < \infty$$

だから $T_\infty f \in l_\infty$ となり，また $0 < p < \infty$ なら Carleson の埋蔵定理 2.1.6 の (2.1.7) により

$$\|T_p f\|_{l_p}^p = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(1 - |z_k|^2\right) |f(z_k)|^p \leqq \beta \, \|f\|_{H_p}^p < \infty$$

となり $T_p f \in l_p$ となるので $T_p(H_p) \subset l_p$ $(0 < p \leqq \infty)$ が確かめられた．逆に任意の $v \in l_p$ をとる．v に対して唯一つの $w \in l_p(\Lambda)$ で

$$v(k) = \left(1 - |z_k|^2\right)^{1/p} w(k) \quad (k \in \mathbb{N})$$

となる．構成的補間点列 1.11 の証明は次節 3 で与えるが，そこでは，こゝ迄で示した所以外は一切使わずに行うので，循環論法に陥ることなく，こゝで現進行中の証明の為に定理 1.11 を使うことは論理的に正当遵法で或る．よって定理 1.11 で言う関数列 $\{F_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset H_p$ をとって

$$E_w := \sum_{m \in \mathbb{N}} w(m) F_m$$

とおくならば，$E_w \in H_p$ で，$E_w(z_k) = w(k)$ $(k \in \mathbb{N})$ だから

$$T_p E_w(k) = \left(1 - |z_k|^2\right)^{1/p} E_w(z_k) = \left(1 - |z_k|^2\right)^{1/p} w(k) = v(k) \quad (k \in \mathbb{N})$$

である．従って $v = T_p E_w$ となり，$T_p(H_p) \supset l_p$ も確かめられた．以上により，$\Lambda = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が一様分離ならば，どんな $0 < p \leqq \infty$ に対しても $T_p(H_p) = l_p$ となる，ことの証明が完結する．□

3. Hardy 補間級数の構成

本節 3 では，本論文の主目的である所の定理 1.2 (構成的補間定理)，従って不等式 (1.10) の証明を行う．その為に，先ず $\Lambda = \{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ は一様分離である様に与え，その一様分離示数は $0 < \delta < 1$ であるとする．そこで，各 $0 < p \leqq \infty$ に対し $\mathbb{D}$ 上の関数列 $\{F_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ が次の 3 条件をみたすものとする：第一に

(3.1) $$F_m \in H_p \quad (m \in \mathbb{N})$$

であるとする．第二に，δ_{mk} を Kronecker のデルタとして，

(3.2) $$F_m(z_k) = \delta_{mk} \quad (k, m \in \mathbb{N})$$

をみたすとする．第三に，予め上手く正定数 $0<K_p<\infty$ が与えられて居て

(3.3)
$$\left\|\sum_{m\in\mathbb{N}} w(m)F_m\right\|_{H_p} \leqq K_p \|w\|_{l_p(\Lambda)}$$

がどんな $w\in l_p(\Lambda)$ に対しても成立しているとする．こんな関数列 $\{F_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ が構成できたら自動的にある正定数 $0<C_p<\infty$ が定まって

(3.4)
$$C_p^{-1}\|w\|_{l_p(\Lambda)} \leqq \left\|\sum_{m\in\mathbb{N}} w(m)F_m\right\|_{H_p} \leqq C_p\|w\|_{l_p(\Lambda)}$$

がすべての $w\in l_p(\Lambda)$ に対して成り立つことが言える．事実，(3.3) よりすべての $w\in l_p(\Lambda)$ につき

(3.5)
$$E_w := \sum_{m\in\mathbb{N}} w(m)F_m \in H_p$$

であり，更に埋蔵定理 2.2.6 によれば，或る正数 $0<\beta_p<\infty$ $(0<p\leqq\infty)$ が定まり，$E_w(z_k)=w(k)$ $(k\in\mathbb{N})$ が (3.2) から従い，そして

$$\begin{cases} \|w\|_{l_p(\Lambda)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-|z_k|^2\right)|E_m(z_k)|^p\right)^{1/p} \leqq \beta_p^{1/p}\|E_m\|_{H_p} & (0<p<\infty), \\ \|w\|_{l_\infty(\Lambda)} = \sum_{k\in\mathbb{N}}|w(k)| = \sup_{k\in\mathbb{N}}|E_w(k)| = \|E_w\|_{H_\infty} & (p=\infty) \end{cases}$$

であり，従って兎に角，すべての $w\in l_p(\Lambda)$ に対し ($\beta_\infty^{1/\infty}=1$ と解して)

(3.6)
$$\beta_p^{-1}\|w\|_{l_p(\Lambda)} \leqq \|E_w\|_{H_p} = \left\|\sum_{m\in\mathbb{N}} w(m)F_m\right\|_{H_p}$$

となる．そこで $C_p:=\max\left(K_p,\beta_p^{1/p}\right)$ とおけば，(3.3) と (3.6) から (3.4) が導かれる．そう言う訳で，(3.1)–(3.3) をみたす関数列 $\{F_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ の構成をすべての $0<p\leqq\infty$ で行えば本節の目的が達せられる．これを以下の 3.1–3.3 の三部分節に於いて，$0<p\leqq 1$ の場合，$1<p<\infty$ の場合，そして $p=\infty$ の場合の三つの状況夫々で，それぞれに応じた構成を行う．

補間級数の構成は補間可能定理 $T_p(H_p)=l_p$ $(0<p\leqq\infty)$ より一歩進んだ内容で，最初 $p=\infty$ について Pehr Beurling が初めて構成可能なことを示したと Carleson [3] が紹介しているが，Pehr Beurling 自身の証明は公刊されてはいないようであるが，その詳細は Garnett の書 [8] や Fisher の本 [7] に記されている．本質的にはこれらの証明と同一だけれど，分かり易さと簡明さを最優先に心がけた，そして自己完結も重視した証明を小節 3.3 に述べる．時を経ずして，Kabaĭla ([15], [16]) が $0<p\leqq 1$ の場合の構成証明を与えたが，これは驚くべき簡単な証明である．それは $0<p\leqq 1$ であると，便利な不等式 $(\sum_i|t_i|)^p\leqq\sum_i|t_i|^p$ の成立に起因する．Kabaĭla の証明は Duren の本 [6] の pp.153–154 に採録されている．下の小節 3.1 で比較の為 $0<p\leqq 1$ の構成証明を述べる．大分長い間 $1<p<\infty$ の場合の構成を与える論文は出てこなかったが，その後 Schuster-Seip [34] が構成可能なことを通りすがりに注意した．$0<p\leqq 1$ の場合程単純ではないが，それでもやはり予想以上に簡単であった．$f\in L_p$ $(1<p<\infty)$ であると $\tilde f(z):=(1/2\pi i)\int_{\mathbb{T}}f(\zeta)(\zeta-z)^{-1}\zeta^{-1}d\zeta$ により与えられる f の Cauchy 変換 $\tilde f\in H_p$ で，作用素 $f\mapsto\tilde f: L_p\to H_p$ は有界であると言う M. Riesz の定理が唯一の証明の為の非自明な立脚点である．この $1<p<\infty$ の場合の構成は小節 3.2 で述べる．こうしてみると，実は一番古く最初に完成していた $p=\infty$ の場合が最も難しく深い作業であったことを思い知る．

3.1. H_p $(0<p\leqq 1)$ の補間級数. 一様分離示数 $0<\delta<1$ の $\Lambda=\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ の Blaschke 積を B，$\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}\setminus\{k\}}$ の Blaschke 積を B_k $(k\in\mathbb{N})$ とする．即ち

$$B(z)=\prod_{j\in\mathbb{N}}\frac{z-z_j}{1-\bar z_j z},\qquad B_k(z)=\prod_{j\in\mathbb{N}\setminus\{k\}}\frac{z-z_j}{1-\bar z_j z}\quad(k\in\mathbb{N})$$

である．そこで関数列 $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を

(3.1.1)
$$F_k(z):=\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar z_k z}\right)^{2/p}\cdot\frac{B_k(z)}{B_k(z_k)}\quad(k\in\mathbb{N})$$

で与える．$F_k \in H_\infty \subset H_p$ $(k \in \mathbb{N})$ 且つ $F_k(z_j) = \delta_{kj}$ $(k, j \in \mathbb{N})$ となることは明らかである．そこで各 $w \in l_p(\Lambda)$ に対して

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} w(k) F_k(z)$$

が各 $z \in \mathbb{D}$ で定義可能で，これが H_p に属し，更に $K_p = 1/\delta$ として

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} w(k) F_k \right\|_{H_p} \leqq K_p \|w\|_{l_p(\Lambda)} \quad (w \in l_p(\Lambda)) \tag{3.1.2}$$

を満足することを証明したい．その為には，ある有限個の $k \in \mathbb{N}$ を除いて $w(k) = 0$ であるような $w \in l_p(\Lambda)$ に対して (3.1.2) の成立を示せば十分である．$0 < p \leqq 1$ だから，$\mathbb{T}$ 上

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{N}} w(k) F_k(e^{i\theta}) \right|^p \leqq \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |w(k)| \left| F_k(e^{i\theta}) \right| \right)^p \leqq \sum_{k \in \mathbb{N}} |w(k)|^p \left| F_k(e^{i\theta}) \right|^p \tag{3.1.3}$$

である．こゝで

$$\left| F_k(e^{i\theta}) \right|^p = \frac{\left(1 - |z_k|^2\right)^2}{|1 - \bar{z}_k e^{i\theta}|^2} \cdot \frac{\left| B_k(e^{i\theta}) \right|^p}{|B_k(z_k)|^p}$$

に於いて，$\left|1 - \bar{z}_k e^{i\theta}\right|^2 = \left|e^{-i\theta} - \bar{z}_k\right|^2 = \left|e^{i\theta} - z_k\right|^2$, $\mathbb{T}$ 上 a.e. に $\left|B_k(e^{i\theta})\right|^p = 1$, 更に $|B_k(z_k)|^p > \delta^p$ であるから，$\mathbb{T}$ 上 a.e. に

$$\left| F_k(e^{i\theta}) \right|^p \leqq \frac{1}{\delta^p} \cdot \left(1 - |z_k|^2\right) \cdot \frac{1 - |z_k|^2}{\left|e^{i\theta} - z_k\right|^2}$$

となる．上不等式右辺の第 3 因子は Poisson 核だから，その $\mathbb{T}$ 上の $d\theta$ による積分は 2π である．(3.1.3) より

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} w(k) F_k(e^{i\theta}) \right|^p d\theta \leqq \frac{1}{\delta^p} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(1 - |z_k|^2\right) |w(k)|^p \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z_k|^2}{\left|e^{i\theta} - z_k\right|^2} d\theta$$

である故結局

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} w(k) F_k(e^{i\theta}) \right|^p d\theta \right)^{1/p} \leqq \frac{1}{\delta} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \left(1 - |z_k|^2\right) |w(k)|^p \right)^{1/p}$$

となる．$1/\delta = K_p$ と記したことを想起して，これは (3.1.2) の $w \in l_p(\Lambda)$ が殆どすべての $k \in \mathbb{N}$ について $w(k) = 0$ の場合のもので，これから，Fréchet 空間 H_p と $l_p(\Lambda)$ の完備性により，一般の $w \in l_p(\Lambda)$ に対して (3.1.2) の成立が結論される． □

3.2. H_p $(1 < p < \infty)$ の補間級数. 本節の目的は，$\Lambda = \{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ が一様分離と言う仮定のもとに Λ に関する H_p $(1 < p < \infty)$ の補間級数を構成することである．前節の H_p $(0 < p \leqq 1)$ の場合程ではないが，今回も随分と手短かと言える．とは言え，たゞ一点 $\varphi \in L_p$ $(1 < p < \infty)$ の Cauchy 変換 $\tilde{\varphi}$ を

$$\tilde{\varphi}(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z} d\theta \quad (z \in \mathbb{D})$$

で与えると $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ は L_p から H_p への有界線形作用素となると言う事実を使用する．すべてを自己完結にと言う本論文の建前上これの証明もつける．これは共軛調和関数に関しての M. Riesz の定理の変形なので，M. Riesz の定理を証明しなければならぬ．こんな具合で本節の主題である補間級数の構成は直ぐに終るが，この準備は大分長くなる．

$\mathbb{D}$ 上の**調和 Hardy 空間** を h_p $(1 \leqq p \leqq \infty)$ と記す．$\mathbb{D}$ 上の実数値調和関数 u に対してその**共軛調和関数** v とは，先ず v は $\mathbb{D}$ 上実数値調和で，$f := u + iv$ が $\mathbb{D}$ 上正則となり，更に $v(0) = 0$ となるものの事とする．$v(0) = 0$ は u に対してその共軛調和関数が唯一つに定まる様にしたい為の正規化条件で，$f(0)$ が実数と言っても同じことになる．この f を u の**正則化**と言う．

定理 3.2.1 (M. Riesz の定理). 指数 p は $1 < p < \infty$ とする. 実数値調和関数 u が $u \in h_p$ ならば, その正則化 $f = u + iv$ は $f \in H_p$ となる. しかも $1 < p < \infty$ の p のみで定まる正定数 A_p があって, すべての $u \in h_p$ に対し

$$\|f\|_{H_p} \leqq A_p \|u\|_{h_p} \quad (1 < p < \infty). \tag{3.2.2}$$

証明 : 任意の $0 < \rho < 1$ に対し u_ρ と v_ρ と f_ρ を夫々 $u_\rho(z) = u(\rho z)$ と $v_\rho(z) = v(\rho z)$ と $f_\rho(z) = f(\rho z)$ で定義すると, v_ρ は u_ρ の共軛調和関数で $f_\rho = u_\rho + iv_\rho$ であり, f_ρ は u_ρ の正則化である. u と f の代りに u_ρ と f_ρ で (3.2.2) が示されたら, $\|u_\rho\|_{h_p} \uparrow \|u\|_{h_p}$ $(\rho \uparrow 1)$, $\|v_\rho\|_{h_p} \uparrow \|v\|_{h_p}$ $(\rho \uparrow 1)$, そして $\|f_\rho\|_{H_p} \uparrow \|f\|_{H_p}$ $(\rho \uparrow 1)$ であるから, u と f について (3.2.2) が示されたことになる. すると u_ρ 従って v_ρ は共に $\overline{\mathbb{D}}$ 上調和でついで f_ρ は $\overline{\mathbb{D}}$ 上正則である. だから u は $\overline{\mathbb{D}}$ 上調和の場合で (3.2.2) を証明すればよい. これが定理の第一の格下げ (reduction) である. 更らに指数 $1 < p < \infty$ の範囲を $1 < p \leqq 2$ に限定して (3.2.2) を示したら十分である. その理由は以下の如くである. $1 < p < \infty$ の 共軛指数を $1 < q < \infty$ とする, 即ち, $1/p + 1/q = 1$ となる q である. そこで (3.2.2) が p に対して成り立つなら q に対する (3.2.2) が A_q として $A_p + 1$ をとって成立することを下に示す. このとき $1 < p \leqq 2$ ならば $2 \leqq q < \infty$ であるから, (3.2.2) が $1 < p \leqq 2$ で成り立つなら $2 \leqq p < \infty$ でも成り立つことがわかる訳である. そこで先ず (3.2.2) が p で成り立つとして q でも成りたつことを言う. 先づ (3.2.2) より弱い次の条件を考える : $1 < p < \infty$ にのみ依存する正定数 A_p があってすべての $u \in h_p$ に対して $v \in h_p$ となり更に不等式

$$\|v\|_{h_p} \leqq A_p \|u\|_{h_p} \quad (1 < p < \infty) \tag{3.2.3}$$

が成り立つ. さて (3.2.2) がある $1 < p \leqq 2$ で成りたつとしているから, 自明な関係 $\|v\|_{h_p} \leqq \|f\|_{H_p}$ により (3.2.3) がこの p で成り立つ. そこで (3.2.3) が p の共軛指数 q でも成りたつことを言う. 補助関数として $\overline{\mathbb{D}}$ 上の任意の調和多項式

$$U(z) = U(re^{i\theta}) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

をとると, その 共軛調和多項式は

$$V(z) = V(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{N} r^n (-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta)$$

である. $c_0 = a_0$ かつ $c_n = a_n - ib_n$ $(1 \leqq n \leqq N)$ として多項式

$$F(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n z^n = U(z) + iV(z)$$

は $U(z)$ の正則化で, V は確かに U の共軛調和関数である.

$$fF = (u + iv)(U + iV) = (uU - vV) + i(uV + vU)$$

で, fF は $\overline{\mathbb{D}}$ 上正則なので $uV + vU$ は $\overline{\mathbb{D}}$ 上調和で, $V(0) = v(0) = 0$ より, その 0 での値は 0 である. そこで $uV + vU$ に Gauss の平均値の定理より

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(u(e^{i\theta}) V(e^{i\theta}) + v(e^{i\theta}) U(e^{i\theta}) \right) d\theta = 0$$

となる. これより双対等式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} vU \, d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} uV \, d\theta$$

が得られる. (3.2.3) が p で成りたつので, それを U とその共軛 V についてかけば, $\|V\|_{h_p} \leqq A_p \|U\|_{h_p}$ である. それで

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} vU \, d\theta \right| = \left| \frac{-1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} uV \, d\theta \right| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |u||V| \, d\theta$$

の右辺に Hölder の不等式を適用すると

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} vU \, d\theta \right| \leqq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |u|^q \, d\theta \right)^{1/q} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |V|^p \, d\theta \right)^{1/p} = \|u\|_{h_q} \|V\|_{h_p}.$$

この最右辺は $\|u\|_{h_q}\cdot A_p\|U\|_{h_p}$ 以下なので，$\mathbb{T}$ 上の調和多項式の集合を $\mathscr{U}$ と記し $U\in\mathscr{U}$ としては $\|U\|_{h_p}=1$ のものばかり取るとすれば

$$\sup_{U\in\mathscr{U},\|U\|_{h_p}=1}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}vU\,d\theta\right|\leqq A_p\|u\|_{h_q}$$

である．$\mathscr{U}$ は L_p 内稠密であるから，上式で $U\in\mathscr{U}$ の所を $U\in L_p$ で置き換えて良い．さて $1<p,q<\infty$ なので L_p と L_q の双対性により

$$\|v\|_{h_q}=\|v\|_{L_q}=\sup_{U\in L_p,\|U\|_{L_p}=1}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}vU\,d\theta\right|\leqq A_p\|u\|_{h_q}$$

となる．これは (3.2.3) が $A_q=A_p$ で成りたつことを意味する：$\|v\|_{h_q}\leqq A_p\|u\|_{h_q}$．しからば $\|f\|_{H_q}\leqq\|u\|_{h_q}+\|v\|_{h_q}\leqq(A_p+1)\|u\|_{h_q}$ である．これは q に於ても，(3.2.2) が $A_q=A_p+1$ として成りたつことである．以上大変長くなったが，定理の格下げ操作が終了である．その結果，我々の為すべきことは，指数 $1<p\leqq 2$ の任意の p に対して，$\overline{\mathbb{D}}$ 上調和な任意の u とその正則化 f をとるとき，(3.2.2) が成り立つことを証明すればよい．

Stokes の公式を想起しよう．φ を $\overline{\mathbb{D}}$ 上 C^2 級である関数とし，領域 $r\mathbb{D}$ $(0<r\leqq 1)$ とその境界 $\partial(r\mathbb{D})=r\partial\mathbb{D}$ に適用するとき

$$\int_{\partial(r\mathbb{D})}*d\varphi=\int_{r\mathbb{D}}d*d\varphi$$

の形に Stokes の公式はかける．こゝに現らわれる諸微分を極座標 $z=re^{i\theta}$ や直角座標 $z=x+iy$ でかくと，$\partial(r\mathbb{D})$ 上で，その線要素 ds を用いて

$$*d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,ds=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,rd\theta$$

であるし，$\overline{\mathbb{D}}$ 上 $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ であるラプラシャンを使って

$$d*d\varphi=\Delta\varphi\,dxdy$$

となるので，結局下で使う Stokes の公式は

$$r\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,d\theta=\int_{|z|<r}\Delta\varphi\,dxdy \tag{3.2.4}$$

の形となる．

此所等辺りでぼつぼつ証明の本筋に入る．$\overline{\mathbb{D}}$ 上の任意の調和関数 u とその正則化 $f=u+iv$ に対して任意の指数 $1<p\leqq 2$ についての (3.2.2) を導出することが課題である．$\varepsilon\downarrow 0$ とする積りであるが，とにかく任意の正数 $\varepsilon>0$ をとり，$|u|^p$ と $|f|^p$ の "ε-近似" $U=U_\varepsilon$ と $F=F_\varepsilon$ を次の様に定める：

$$\begin{cases} U=(u^2+\varepsilon)^{p/2},\\ F=(|f|^2+\varepsilon)^{p/2}=(u^2+v^2+\varepsilon)^{p/2}.\end{cases}$$

元々 $u>0$ なら U と F は夫々 $|u|^p$ と $|f|^p$ を取れば良いが，必ずしも $u>0$ で無いのが普通でその場合では，例えば u が零点を持つかも知れぬ場合など，$\varepsilon=0$ では U と F が C^2 級で無くなってしまい，下の証明を見終れば解かる事であるが，これは決定的な欠陥の一つとなる．その様な次第で $|u|^p$ と $|f|^p$ の ε-近似を上の様に定める訳である．さて，大学１年の微分計算の演習の時間に参加する．たゞ只管の単純計算をするだけで間違わなければ次の解答と同じ結果になる：

$$\begin{cases} \Delta U=p(p-1)|f'|^2(u^2+\varepsilon)^{\frac{p-4}{2}}\left(u^2+\dfrac{\varepsilon}{p-1}\right)>0,\\ \Delta F=p^2|f'|^2(|f|^2+\varepsilon)^{\frac{p-4}{2}}\left(|f|^2+\dfrac{2\varepsilon}{p}\right)>0.\end{cases}$$

$(u^2+\varepsilon)^{(p-4)/2}/(|f|^2+\varepsilon)^{(p-4)/2}=:P$ 及び $(u^2+\varepsilon/(p-1))/(|f|^2+2\varepsilon/p)=:Q$ と置いて，ΔU と ΔF の大小比較の為にこれら二者の商を考える：

$$\frac{p\Delta U}{(p-1)\Delta F}=\frac{(u^2+\varepsilon)^{\frac{p-4}{2}}}{(|f|^2+\varepsilon)^{\frac{p-4}{2}}}\cdot\frac{u^2+\frac{\varepsilon}{p-1}}{|f|^2+\frac{2\varepsilon}{p}}=P\cdot Q$$

を繁々と眺める．$1<p\leqq 2$ であるから $2\varepsilon/p\leqq\varepsilon/(p-1)$ となる．故に Q の分子の中の $\varepsilon/(p-1)$ をより小さい $2\varepsilon/p$ で置き換えると

$$Q=\frac{u^2+\frac{\varepsilon}{p-1}}{|f|^2+\frac{2\varepsilon}{p}}\geqq\frac{u^2+\frac{2\varepsilon}{p}}{|f|^2+\frac{2\varepsilon}{p}}=\frac{u^2p+2\varepsilon}{|f|^2p+2\varepsilon}=:R\quad(1<p\leqq 2)$$

となる．R を $1<p\leqq 2$ 上の関数 $R=R(p)$ とみて p で微分すると

$$\frac{d}{dp}R(p)=-\frac{2\big(|f|^2-u^2\big)\varepsilon}{\big(|f|^2p+2\varepsilon\big)^2}<0\quad(1<p\leqq 2)$$

であるから $R(p)$ は区間 $1<p\leqq 2$ 上の減少関数である故

$$R=R(p)\geqq R(2)=\frac{u^2+\varepsilon}{|f|^2+\varepsilon}\quad(1<p\leqq 2)$$

となり，従って

$$Q\geqq R\geqq\frac{u^2+\varepsilon}{|f|^2+\varepsilon}\quad(1<p\leqq 2)$$

となる．なので商 $p\Delta U/(p-1)\Delta F$ について

$$\frac{p\Delta U}{(p-1)\Delta F}=\frac{\big(u^2+\varepsilon\big)^{\frac{p-4}{2}}}{\big(|f|^2+\varepsilon\big)^{\frac{p-4}{2}}}\cdot Q\geqq\frac{\big(u^2+\varepsilon\big)^{\frac{p-4}{2}}}{\big(|f|^2+\varepsilon\big)^{\frac{p-4}{2}}}\cdot\frac{u^2+\varepsilon}{|f|^2+\varepsilon}=\left(\frac{u^2+\varepsilon}{|f|^2+\varepsilon}\right)^{\frac{p-2}{2}}$$

の評価が得られる．$(u^2+\varepsilon)/(|f|^2+\varepsilon)=(u^2+\varepsilon)/(u^2+v^2+\varepsilon)\leqq 1$ かつ $(p-2)/2\leqq 0$ だから $\big((u^2+\varepsilon)/(|f|^2+\varepsilon)\big)^{(p-2)/2}\geqq 1$ となる．つまり大分苦労したが商 $p\Delta U/(p-1)\Delta F\geqq 1$ が結論出来た．書き換えると，$\mathbb{D}$ 上

$$\Delta F\leqq\frac{p}{p-1}\Delta U$$

となる．依って $0<r\leqq 1$ に対し，上の不等式を円板 $r\mathbb{D}$ 上面積積分して

(3.2.5)
$$\int_{|z|<r}\Delta F\,dxdy\leqq\frac{p}{p-1}\int_{|z|<r}\Delta U\,dxdy\quad(0<r\leqq 1)$$

となる．Stokes の公式 (3.2.4) を $\varphi=U$ 及び $\varphi=F$ で使うと

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{|z|<r}\Delta F\,dxdy=r\int_0^{2\pi}\frac{\partial F}{\partial r}\,d\theta,\\[2ex] \displaystyle\int_{|z|<r}\Delta U\,dxdy=r\int_0^{2\pi}\frac{\partial U}{\partial r}\,d\theta\end{cases}$$

であるから，これ等を (3.2.5) へ代入して，両辺を $2\pi r$ で割ると

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial F}{\partial r}\,d\theta\leqq\frac{p}{p-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U}{\partial r}\,d\theta$$

である．微分と積分の順序交換は許される状況にあるから

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi}F(re^{i\theta})\,d\theta\leqq\frac{p}{p-1}\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi}U(re^{i\theta})\,d\theta$$

となり両辺を r について 0 から 1 迄定積分すると

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(e^{i\theta})\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(0)\,d\theta\leqq\frac{p}{p-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(e^{i\theta})\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(0)\,d\theta\right)$$

である．$v(0)=0$ により $F(0)=\big(u(0)^2+v(0)^2+\varepsilon\big)^{p/2}=\big(u(0)^2+\varepsilon\big)^{p/2}=U(0)$ であるから

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(|f|^2+\varepsilon\big)^{p/2}\,d\theta\leqq\frac{p}{p-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(u^2+\varepsilon\big)^{p/2}\,d\theta-\frac{1}{p-1}U(0)$$

となる．$-U(0)/(p-1) \leqq 0 \ (1 < p \leqq 2)$ が大変大切な所で，結局

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(|f|^2+\varepsilon\right)^{p/2} d\theta \leqq \frac{p}{p-1}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(u^2+\varepsilon\right)^{p/2} d\theta$$

となる．こゝで $\varepsilon \downarrow 0$ としその結果の両辺の p 乗根をとると

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(e^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p} \leqq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|u(e^{i\theta})|^p\,d\theta\right)^{1/p}$$

となり，これは $1 < p \leqq 2$ に対して (3.2.2) が $A_p = (p/(p-1))^{1/p} = q^{1/p} \ (1 < p \leqq 2)$ で成り立つことを示しており証明は完了である． □

上の M. Riesz の定理を今一度少し別の角度から考察する．$u \in h_p \ (1 < p \leqq \infty)$ であるとその境界値関数 $u(e^{i\theta})$ の意味で $u \in L_p$ である．逆に $\varphi \in L_p$ であると $u \in h_p$ で $\mathbb{T}$ 上 a.e. に $u(e^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$ となるものが唯一つ定まる．この u は所謂 φ の $\mathbb{D}$ への**調和接続**である．この意味で $h_p = L_p \ (1 < p \leqq \infty)$ と考えるが，こゝで $\varphi \in L_p \ (1 < p \leqq \infty)$ の $\mathbb{D}$ への調和接続を $u_\varphi \in h_p$ と記す．すると Poisson 核 $(1-|z|^2)/|e^{i\theta}-z|^2$ を使って

$$u_\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\,\varphi(e^{i\theta})\,d\theta$$

である．u_φ の共軛調和関数 v_φ は

$$v_\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{-x\sin\theta + y\cos\theta}{|e^{i\theta}-z|^2}\,\varphi(e^{i\theta})\,d\theta$$

で与えられる．事実，$v_\varphi(0) = 0$ となっている．$1 < p \leqq \infty$ に対し $u_\varphi \in h_p$ と $\varphi \in L_p$ は同じ事であるが，それ故 u_φ の正則化を又 φ の**正則化**と言い，こゝでは $\hat{\varphi}$ と記すことにするならば $\hat{\varphi} = u_\varphi + i v_\varphi$ であって，

(3.2.6)
$$\hat{\varphi}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,\varphi(e^{i\theta})\,d\theta.$$

これは次の等式の示す所の帰結である：

(3.2.7)
$$\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} + i\,\frac{2(-x\sin\theta + y\cos\theta)}{|e^{i\theta}-z|^2}.$$

φ の正則化 (3.2.6) の $\hat{\varphi}$ 自体は $\varphi \in L_p \ (1 \leqq p \leqq \infty)$ ならば定義出来るが，しかし $\varphi \in L_p \ (1 < p < \infty)$ の時にのみ M. Riesz の定理により $\hat{\varphi} \in H_p$ が結論出来る．$\varphi \in L_p$ が実関数なら (3.2.2) が示す通り $\|\hat{\varphi}\|_{H_p} \leqq A_p\|\varphi\|_{L_p}$ なので，もし $\varphi \in L_p$ が複素関数で $\varphi_1 = \mathrm{Re}\,\varphi, \varphi_2 = \mathrm{Im}\,\varphi$ であるとすると，$\|\hat{\varphi}\|_{H_p} \leqq \|\hat{\varphi}_1\|_{H_p} + \|\hat{\varphi}_2\|_{H_p} \leqq A_p(\|\varphi_1\|_{L_p} + \|\varphi_2\|_{L_p}) \leqq 2A_p\|\varphi\|_{L_p}$ である，即ち，$1 < p < \infty$ のみに依存するある正定数 B_p があって

(3.2.8)
$$\|\hat{\varphi}\|_{H_p} \leqq B_p\|\varphi\|_{L_p} \quad (1 < p < \infty)$$

である．だから $\varphi \mapsto \hat{\varphi} : L_p \to H_p \ (1 < p < \infty)$ が有界線形作用素であると言う形に M. Riesz の定理を定式化出来る．

我々が目指して居る事は上の様な事実を φ の正則化 $\hat{\varphi}$ ではなく φ の **Cauchy 変換** $\tilde{\varphi}$ について成り立つことを言いたい：$\varphi \mapsto \tilde{\varphi} : L_p \to H_p \ (1 < p < \infty)$ は有界線形作用素である．$\hat{\varphi}$ 同様 $\varphi \in L_p \ (1 \leqq p \leqq \infty)$ についても φ の **Cauchy 変換** $\tilde{\varphi}$ が定義出来る：

(3.2.9)
$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{1}{e^{i\theta}-z}\,\varphi(e^{i\theta})\,d\theta.$$

これについて，M. Riesz の定理が次の如くに述べられる：任意の $\varphi \in L_p \ (1 < p < \infty)$ に対してその Cauchy 変換 $\tilde{\varphi} \in H_p$ $(1 < p < \infty)$ で，更に $1 < p < \infty$ のみに依存する正定数 C_p が定まって

(3.2.10)
$$\|\tilde{\varphi}\|_{H_p} \leqq C_p\|\varphi\|_{L_p} \quad (1 < p < \infty).$$

証明：定義達 (3.2.6) と (3.2.9) を見較らべて，それらの核の間の関係

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} - 1\right) = z\cdot\frac{1}{e^{i\theta}-z}$$

に注目する．この両辺に φ をかけて $\mathbb{T}$ 上 $d\theta/2\pi$ で積分すると，$I(z) \equiv z$ である恒等関数 I を使ってかけば $\mathbb{D}$ 上

$$\frac{1}{2}\left(\hat{\varphi}(z) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \varphi(e^{i\theta})\, d\theta\right) = I(z)\tilde{\varphi}(z)$$

となる．従って

$$|I\tilde{\varphi}| \leqq \frac{1}{2}\left(|\hat{\varphi}| + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \varphi(e^{i\theta})\, d\theta\right|\right)$$

である．Hölder の不等式により上記不等式の定数項を見積もると

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \varphi(e^{i\theta})\, d\theta\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left|\varphi(e^{i\theta})\right| d\theta \leqq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |\varphi(e^{i\theta})|^p\, d\theta\right)^{1/p} = \|\varphi\|_{L_p}$$

他方 $|I(e^{i\theta})| = |e^{i\theta}| = 1$ だから $|I||\mathbb{T} = 1$ により

$$\|I\tilde{\varphi}\|_{H_p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |I\tilde{\varphi}|^p\, d\theta\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |\tilde{\varphi}|^p\, d\theta\right)^{1/p} = \|\tilde{\varphi}\|_{H_p}$$

である．故に (3.2.8) 等を用いて

$$\|\tilde{\varphi}\|_{H_p} = \|I\tilde{\varphi}\|_{H_p} \leqq \frac{1}{2}\left(\|\hat{\varphi}\|_{H_p} + \|\varphi\|_{L_p}\right) \leqq \frac{1}{2}\,(B_p + 1)\,\|\varphi\|_{L_p}$$

を得る．これは (3.2.10) が $C_p := (B_p + 1)/2$ として成り立つことを示す． □

以上で準備は完了だけれど今一言注意を加えたい．先ず用語について，一般的には，正則関数の実部と虚部である調和関数を互いに共軛と言うのだから，$u + iv$ が正則である限り v を u の一つの共軛調和関数と呼ぶのが普通である．本節では更に $v(0) = 0$ となるものに限って v を u の共軛調和関数と言って来た．記述の簡明さを期しての事だから，一般的な文脈では曖昧さを避けて，$u + iv$ が単に正則のとき v を u の単なる共軛調和関数と言い，更に $v(0) = 0$ を要求するならば，例えば，**正規化共軛調和関数**とでも言う方が，長くて大分面倒ながら，勿論より良いであろう．又本節では，$u + iv$ が正則で $v(0) = 0$ となるとき $u + iv = \hat{u}$ と記して u の，又は u の境界値 $u(e^{i\theta})$ の，正則化と呼んだ．英語ならば regularization であるが，これは数学述語としては mollifier (軟化作用素) と同義に使われるので，一般的には，多分，正則化と聞けば，むしろ軟化作用素のことゝ理解するだろう．従って，一般的には，これも又，例えば，**解析的正則化**とでも呼ぶと良いかも知れぬ．さてこれら提案の新用語を使って言えば，本節これまでの所で，次の階層的な三個の陳述を扱った：

(a) $u \in h_p$ $(1 < p < \infty)$ の正規化共軛調和関数 v は h_p に入り，$u \mapsto v : h_p \to h_p$ は有界線形作用素である；
(b) $\varphi \in L_p$ $(1 < p < \infty)$ の解析的正則化 $\hat{\varphi}$ は H_p に入り，$\varphi \mapsto \hat{\varphi} : L_p \to H_p$ は有界線形作用素である；
(c) $\varphi \in L_p$ $(1 < p < \infty)$ の Cauchy 変換 $\tilde{\varphi}$ は H_p に入り，$\varphi \mapsto \tilde{\varphi} : L_p \to H_p$ は有界線形作用素である．

幾分入り組んでは居るが，兎に角，定理 3.2.1 及び不等式 (3.2.10) の夫々の証明とそれに纏る所を仔細に眺めたら，容易に次の主張は了解出来る．

注意 3.2.11. 三陳述 (a) と (b) 及び (c) は互に同値である．

通常 (a) の主張を M. Riesz の定理と呼び，(b) や (c) は M. Riesz の定理から従うと言う具合に記述する文献が多いが，実は (b) も (c) も (a) と同等なので，(a) も (b) も (c) のどれも M. Riesz の定理と呼ぶのが正確な理解に繋ると言う意味で最善かと思われる．

今一つ M. Riesz の定理に於ける指数の制限 $1 < p < \infty$ は致命的に重要で絶対に忘れてはならぬ．$1 < p < \infty$ でないと証明が上手く行かないからではなく，$p = 1$ と $p = \infty$ では M. Riesz の定理が成り立たない例があるからである．**$p = 1$ では駄目な例**は，$1 = e^{i0}$ に極を持つ Poisson 核

$$u(z) := \frac{1 - |z|^2}{|z - 1|^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$$

が例である．$z = re^{it}$ の極形式を使うと

$$u(re^{it}) = \frac{1-r^2}{|re^{it}-1|^2} = \frac{1-r^2}{|re^{-it}-1|^2} = \frac{1-r^2}{|e^{it}-r|^2}$$

となるから

$$\|u\|_{h_1} = \lim_{r\uparrow 1} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left|u(re^{it})\right| dt = \lim_{r\uparrow 1} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{1-r^2}{|e^{it}-r|^2}\, dt = 1$$

であるから $u \in h_1$ である．u の正規化共軛調和関数 v は

$$v(z) := \frac{2\mathrm{Im}\, z}{|z-1|^2} = \mathrm{Im}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

で与えられるので，$z = e^{it} \in \mathbb{T}$ に於ては

$$v(e^{it}) = \frac{2\cos t}{|e^{it}-1|^2} \sim \frac{2}{t^2} \quad (t \downarrow 0)$$

であるから，$\varepsilon > 0$ を十分小さくとれば $\left|v(e^{it})\right| > 1/t^2$ $(0 < t < \varepsilon)$ となり

$$\|v\|_{h_1} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left|v(e^{it})\right| dt \geqq \frac{1}{2\pi}\int_{(0,\varepsilon]} \frac{1}{t^2}\, dt = +\infty$$

となり，$u \in h_1$ にも拘らず $v \notin h_1$ である．故に $\hat{u} = (1+z)/(1-z) \notin H_1$ かつ $z\tilde{u} = \hat{u} - 1$ より $\tilde{u} \notin H_1$ でもある．
$p = \infty$でも駄目な例は

$$u(z) := \mathrm{Re}\left(i \log \frac{1+z}{1-z}\right) \quad (z \in \mathbb{D})$$

である，但し対数関数は $\log 1 = 0$ となる分枝をとる．その正規化共軛調和関数 $v(z)$ は勿論

$$v(z) := \mathrm{Im}\left(i \log \frac{1+z}{1-z}\right)$$

である．実際 $v(0) = 0$ となっている．そこで

$$f(z) := u(z) + iv(z) = i \log \frac{1+z}{1-z}$$

と書くならば $f = \hat{u}$ で，実は，f は単位円版 $\mathbb{D}$ を虚軸を対称軸に持つ上下に無限に延びる帯状領域 $\{u + iv : |u| < \pi,\ -\infty < v < \infty\}$ へ写像する等角写像である．故に $u \in h_\infty$ であるのに $v \notin h_\infty$ であるし，$\hat{u} = f \notin H_\infty$ であるし，$z\tilde{u} = \hat{u} - 1 = f - 1 \notin H_\infty$ で $z \in H_\infty$ だから，$\tilde{u} \notin H_\infty$ も明かである．

補間級数の構成： これより本題に入る．即ち，Hardy 空間 H_p $(1 < p < \infty)$ の補間級数 $\sum_m w(m)F_m$ の構成である．従前通り一様分離示数 $0 < \delta < 1$ の点列 $\Lambda = \{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ に対し，$\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ の Blaschke 積を B，$\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}\setminus\{k\}}$ の Blaschke 積を B_k $(k \in \mathbb{N})$ と記す．基本となる H_p の関数列 $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ を次の如くに定める：

$$F_m(z) := \frac{B(z)}{(z - z_m)B'(z_m)} \quad (m \in \mathbb{N}). \tag{3.2.12}$$

このとき各 $w \in l_p(\Lambda)$ に対し級数

$$f(z) := \sum_{m\in\mathbb{N}} w(m)F_m(z) \tag{3.2.13}$$

が求める補間級数である．即ち，$f \in H_p$ であって，かつ $f(z_m) = w(m)$ $(m \in \mathbb{N})$ をみたす．その上 $w \mapsto f$ は全射かつ両連続である．この事を証明する為には，次の 3 条件を確認すれば良い：

$$F_m \in H_\infty \subset H_p \quad (m \in \mathbb{N}); \tag{3.2.14}$$

$$F_m(z_k) = \delta_{mk} \quad (m, k \in \mathbb{N}); \tag{3.2.15}$$

$$\sup_{w \in l_p(\Lambda),\, \|w\|_{l_p(\Lambda)}=1} \left\| \sum_{m\in\mathbb{N}} w(m) F_m \right\|_{H_p} < +\infty. \tag{3.2.16}$$

上の 3 条件の各々をこの順に示していく．Blaschke 積 B と B_k の定義により

$$B(z) = \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z} B_k(z) \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{3.2.17}$$

である．$B(z_k) = 0$ だから

$$\frac{B(z) - B(z_k)}{z - z_k} = \frac{B_k(z)}{1 - \bar{z}_k z}$$

となり，こゝで $z \to z_k$ とすることで

$$B'(z_k) = \frac{B_k(z_k)}{1 - |z_k|^2} \tag{3.2.18}$$

となる．従って，定義としての (3.2.12) 以外にも $F_m(z)$ の表示としては

$$F_m(z) = \frac{1 - |z_m|^2}{B_m(z_m)} \cdot \frac{B(z)}{z - z_m} \quad (m \in \mathbb{N}), \tag{3.2.19}$$

$$F_m(z) = \frac{1 - |z_m|^2}{1 - \bar{z}_m z} \cdot \frac{B_m(z)}{B_m(z_m)} \quad (m \in \mathbb{N}) \tag{3.2.20}$$

等がある．この最後の (3.2.20) を眺めたら (3.2.14) の成立も (3.2.15) の成立も共に一目瞭然であるので，残る所の (3.2.16) のみが証明を要する．その前提として (3.2.13) 自体が定義可能なことを示さねばならぬが，直接には難しいので，(3.2.16) を先ず特別の $w \in l_p(\Lambda)$ の場合，即ち，有限個の $m \in \mathbb{N}$ を除いてそれ以外のすべての $m \in \mathbb{N}$ について $w(m) = 0$ となる w について (3.2.16) を示す．しからば $f \in H_\infty \subset H_p$ は明白であるから，$\|f\|_{H_p} = \|f\|_{L_p}$ の評価へと進んで良い．$1 < q < \infty$ を $1 < p < \infty$ の共軛指数とする：$1/q + 1/p = 1$．すると L_p の共軛空間 $(L_p)^* = L_q$ で，任意の $g \in (L_p)^*$ としての $g \in L_q$ の，汎関数である g の f に於ける値を $\langle f, g \rangle$ とすると，$\langle f, g \rangle$ は

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(e^{i\theta}) g(e^{i\theta})\, d\theta$$

で与えられる．そのとき $\|f\|_{H_p}$ は

$$\|f\|_{H_p} = \|f\|_{L_p} = \sup_{g \in L_q,\, \|g\|_{L_q}=1} |\langle f, g \rangle|$$

によって計算出来る．F_m の (3.2.19) の表示を使って $\langle f, g \rangle$ を書くと，先づ，

$$f(e^{i\theta}) \cdot g(e^{i\theta}) = \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} w(m) \frac{1 - |z_m|^2}{B_m(z_m)} \frac{B(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z_m} \right) \cdot g(e^{i\theta})$$

だから，両辺を $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ 上測度 $d\theta/2\pi$ で積分して

$$\langle f, g \rangle = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{B_m(z_m)} \bigl(1 - |z_m|^2\bigr) w(m) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{B(e^{i\theta}) g(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z_m}\, d\theta$$

となる．$g \in L_q$ かつ $\|g\|_{L_q} = 1$ だから，$\mathbb{T}$ 上 a.e. に $|B(e^{i\theta})| = 1$ により $|(Bg)(e^{i\theta})| = |B(e^{i\theta})|\,|g(e^{i\theta})| = |g(e^{i\theta})|$ だから，$\|Bg\|_{L_q} = \|g\|_{L_q} = 1$ となり，$Bg \in L_q$ である．M. Riesz の定理より Bg の Cauchy 変換 $\widetilde{Bg} \in H_q$ で

$$|\langle f, g \rangle| = \left| \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{B_m(z_m)} \bigl(1 - |z_m|^2\bigr) w(m) \widetilde{Bg}(z_m) \right| \leqq \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{|B_m(z_m)|} \bigl(1 - |z_m|^2\bigr)\, |w(m)| \cdot \left| \widetilde{Bg}(z_m) \right|$$

である．Λ の一様分離性により $1/|B_m(z_m)| \leqq 1/\delta$ であり，$\left(1-|z_m|^2\right) = \left(1-|z_m|^2\right)^{1/p}\left(1-|z_m|^2\right)^{1/q}$ 故

$$|\langle f,g\rangle| \leqq \frac{1}{\delta}\sum_{m\in\mathbb{N}}\left(1-|z_m|^2\right)^{1/p}|w(m)|\cdot\left(1-|z_m|^2\right)^{1/q}\left|\widetilde{Bg}(z_m)\right|$$

となる．上不等式右辺に Hölder の不等式を適用すれば

$$|\langle f,g\rangle| \leqq \frac{1}{\delta}\left(\sum_{m\in\mathbb{N}}\left(1-|z_m|^2\right)|w(m)|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{m\in\mathbb{N}}\left(1-|z_m|^2\right)\left|\widetilde{Bg}(z_m)\right|^q\right)^{1/q}.$$

右辺第 1 因子は $(1/\delta)\|w\|_{l_p(\Lambda)}$ である．第 2 因子は，Carleson の埋蔵定理の (2.2.7) を使い，次に M. Riesz の定理の (3.2.10) を使って

$$\left(\sum_{m\in\mathbb{N}}\left(1-|z_m|^2\right)\left|\widetilde{Bg}(z_m)\right|^q\right)^{1/q} \leqq \beta\left\|\widetilde{Bg}\right\|_{H_q} \leqq \beta C_q\|Bg\|_{L_q} = \beta C_q\|g\|_{L_q} = \beta C_q$$

となる．これら 2 評価の綜合として

$$|\langle f,g\rangle| \leqq \frac{1}{\delta}\|w\|_{l_p(\Lambda)}\cdot\beta C_q = \frac{\beta C_q}{\delta}\|w\|_{l_p(\Lambda)}$$

となる．$K_p := \beta C_q/\delta$ と置くと，これは Λ と p のみに依存する正定数であり

$$\|f\|_{H_p} = \|f\|_{L_p} = \sup_{g\in L_p,\,\|g\|_{L_q}=1}|\langle f,g\rangle| \leqq K_p\|w\|_{l_p(\Lambda)},$$

繰り返すと，p と Λ のみに依存する正定数 K_p があって

$$\|f\|_{H_p} \leqq K_p\|w\|_{l_p(\Lambda)} \tag{3.2.21}$$

が少く共，殆んどの $w(m)=0$ となる $w\in l_p(\Lambda)$ について成り立つ．そこで任意の一般の $w\in l_p(\Lambda)$ に対する (3.2.13) により与えられる一般の f に対しても (3.2.21) が成り立つことを示す．この一般の $w\in l_p(\Lambda)$ に対し $w_n(m)=w(m)$ $(m\leqq n)$ かつ $w_n(m)=0$ $(m>n)$ により定義される列 $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset l_p(\Lambda)$ をとり，

$$f_n := \sum_{1\leqq m\leqq n} w_n(m)F_m \quad (n\in\mathbb{N})$$

とおくとき，これらに対しては (3.2.21) の適用が許容されるので，$j<k$ として，

$$\|f_k-f_j\|_{H_p} \leqq K_p\|w_k-w_j\|_{l_p(\Lambda)}$$

となり，$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $l_p(\Lambda)$ 内の Cauchy 列故 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ も H_p 内の Cauchy 列で，$l_p(\Lambda)$ も H_p も完備 Banach 空間だから，$l_p(\Lambda)$ 内で $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は w に強収束し，同様に $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は H_p 内 f に強収束する．更に H_p 内の強収束は $\mathbb{D}$ 上の局所一様収束を惹起するので (3.2.13) の $\mathbb{D}$ 上の局所一様収束の意味に於ても定義される．こうして一般の $w\in l_p(\Lambda)$ に対して (3.2.13) で定めた $f\in H_p$ で，例外なく (3.2.21) が成立する．これと (3.2.16) は同値なので，(3.2.16) の成立も確かに保証出来る．□

3.3. H_∞ の補間級数. 本小節の目的は，H_∞ の補間級数 $\sum_{m\in\mathbb{N}}w(m)F_m$ $(w\in l_\infty)$ の構成を行うことである．最も御し易いのは H_p $(0<p\leqq 1)$ の補間級数の構成で，これと言った道具も，何の準備も要らなかった．H_p $(1<p<\infty)$ の場合は，Cauchy 変換に関する M. Riesz の定理を準備する必要はあったものの，本筋は H_p $(0<p\leqq 1)$ の場合に次いで単純な一本道であった．$0<p<\infty$ の場合と違って，H_∞ の補間級数は相当に難物である．開発の順からは，H_∞ の場合が一番に古く，これが $T_p(H_p)=l_p$ の証明も兼ねたこの場合の補間級数の構成の指針を与えた．比較的長期間 $1<p<\infty$ の場合は懸案の儘になっていたが，状況は $0<p\leqq 1$ の場合に酷似しており，同一精神で，しかし技術的には大分に高度な内容で遂行された．しかし H_∞ の補間級数の構成は $0<p<\infty$ の場合に較べて断然内容も硬く，背影的準備も大変である．Carleson の言う所では P. Beurling の創始になるとのことで，彼自身の証明は公刊されておらず，例えば Garnett の書 [8] や Fisher の教科書 [7] 等に証明が述べられているが，出来得る限り易しい，分かり易い，そして手短な証明の開発は依然として望まれる所である．以下本節では，この希求を基本方針とする証明の考案に努めるが，本質的には，例示した上記二著を超えていない．今後の課題である．

さて，一様分離示数 $0<\delta<1$ の一様分離点列 $\Lambda=\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ を与えたとき，次の3性質をみたす関数列 $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ が作りたい．第1に言う迄もない条件であるが

$$F_m \in H_\infty \quad (m\in\mathbb{N}); \tag{3.3.1}$$

次に，δ_{ij} をクロネッカーのデルタとするとき，課するべき第2条件は

$$F_m(z_k)=\delta_{mk} \quad (m,k\in\mathbb{N}); \tag{3.3.2}$$

そして作るのに一番頑張りの要る第3の条件として

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\sum_{m\in\mathbb{N}}|F_m(z)|<\infty. \tag{3.3.3}$$

このような関数列 $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ を構成することが本節3.3の最終目標である．

構成の為の準備から始める．最初は Hahn-Banach の定理で，それは次の形で流れに参画する．X を Banach 空間とし Y をその閉線形部分空間とする．X 上の有界線形汎関数 x^* の作る X の 共軛空間を X^* と記す．$x^*\in X^*$ の $x\in X$ に於ける値を $\langle x,x^*\rangle$ とかく．$x^*\in X^*$ のノルム $\|x^*\|_{X^*}$ は

$$\|x^*\|_{X^*}:=\sup_{x\in X,\|x\|_X=1}|\langle x,x^*\rangle|$$

で与えられる．Y も X の Banach 部分空間として又一つの Banach 空間であるから，その共軛空間は Y^* とかかれる．$x^*|Y=0$ となる $x^*\in X^*$ の全体の作る X^* の閉部分空間を $Y^\perp$ とかき，Y の**消滅空間** (annihilator) と呼ぶ：

$$Y^\perp:=\{x^*\in X^*:x^*|Y=0\}.$$

次に $Y^\perp$ を法とする X^* の商空間 $X^*/Y^\perp$ を考える：X^* の二元 x_1^* と x_2^* が $Y^\perp$ を法として同値，記号で $x_1^*\sim x_2^*$，であるとは $x_1^*-x_2^*\in Y^\perp$ となることであるとする．X^* の $Y^\perp$ を法とする同値類は一般にその代表元 $x^*\in X^*$ により $x^*+Y^\perp:=\{x^*+y^*:y^*\in Y^\perp\}$ と表される．又簡単にこれを $\widetilde{x^*}$ ともかく：$\widetilde{x^*}=x^*+Y^\perp$．$X^*/Y^\perp$ 上の線形演算，即ち加法とスカラー倍を夫々

$$\widetilde{x_1^*}+\widetilde{x_2^*}:=\widetilde{x_1^*+x_2^*} \quad と \quad \lambda\widetilde{x^*}:=\widetilde{\lambda x^*} \quad (\lambda\in\mathbb{C})$$

で定義すると，これらが代表元の選び方に依存しないので定義出来，$X^*/Y^\perp$ が $\mathbb{C}$ 上の線形空間になる．最も重要なのは，各 $\widetilde{x^*}=x^*+Y^\perp\in X^*/Y^\perp$ のノルム $\|\widetilde{x^*}\|_{X^*/Y^\perp}$ を

$$\|\widetilde{x^*}\|_{X^*/Y^\perp}=\|x^*+Y^\perp\|_{X^*/Y^\perp}:=\inf_{y^*\in Y^\perp}\|x^*+y^*\|_{X^*}=\inf_{z^*\in x^*+Y^\perp}\|z^*\|_{X^*} \tag{3.3.4}$$

で定義すると，これにより $X^*/Y^\perp$ がまた Banach 空間となることが示される．因みに，現対象の $X^*/Y^\perp$ の場合に限ってのことであるが，(3.3.4) の inf は min で置き換えることが出来る (下の (3.3.6) 参照)．

次に Y^* と $X^*|Y:=\{x^*|Y:x^*\in X^*\}$ の関係を考察する．明らかに $X^*|Y\subset Y^*$ である．問題はこの逆に関する所，即ち，Y 上の有界線形汎関数 $y^*\in Y^*$ が，或る X 上の有界線形汎関数 $x^*\in X^*$ を求めて $y^*=x^*|Y$ と出来るか，換言すれば，y^* を X 上の有界線形汎関数 x^* に拡張出来るか，その上一般には増えるノルムを元々のままに止めてこれが可能かの考察である．関数解析学の三大基本原理の内一般の Fréchet 空間では駄目で Banach 空間で初めて常に成立する唯一の原理である拡張原理がこの点を解明する．この原理を上の状況に則して最も適応する形で述べる．それが **Hahn-Banach の定理**：任意の $y^*\in Y^*$ に対して $x^*|Y=y^*$ かつ $\|x^*\|_{X^*}=\|y^*\|_{Y^*}$ となる $x^*\in X^*$ が存在する，である．このような $x^*\in X^*$ を y^* の X への**等長拡張**と言う．すると，無論，$X^*|Y\supset Y^*$ が結論されるから，結局

$$X^*|Y=Y^* \tag{3.3.5}$$

である．或る $x^*\in X^*$ を固定するとき $x^*|Y$ の X への有界線形作用素としての拡張達全体は $\{x^*+y^*:y^*\in Y^\perp\}$ である．また $(x^*+y^*)|Y=x^*|Y$ により $\|x^*|Y\|_{Y^*}=\|x^*+y^*\|_{Y^*}\leqq\|x^*+y^*\|_{X^*}$ でもある．だから等長拡張の存在部分と合わせると

$$\|x^*|Y\|_{Y^*}=\min_{y^*\in Y^\perp}\|x^*+y^*\|_{X^*} \tag{3.3.6}$$

が出る．ここで (3.3.4) と (3.3.6) を見較べると，先ず (3.3.4) の $\inf_{y^*\in Y^\perp}\|x^*+y^*\|_{X^*}$ は $\min_{y^*\in Y^\perp}\|x^*+y^*\|_{X^*}$ で置き換えてよいことがわかり，次いで，$\|\widetilde{x^*}\|_{X^*/Y^\perp}=\|x^*|Y\|_{Y^*}$ だから，二つの Banach 空間達 $X^*/Y^\perp$ と Y^* は Banach 空間として同一視できることが直ちに首肯出来る．これを更に詳しく述べて次の形に纏める：

定理 3.3.7. 作用素 $T:X^*/Y^\perp\to Y^*$ を $T(x^*+Y^\perp)=x^*|Y$ $(x^*\in X^*)$ で定めると，T は等距離線形全単射作用素となり，従って，$X^*/Y^\perp$ は Banach 空間として Y^* と同型，即ち，$X^*/Y^\perp\approx Y^*$ (等距離) であり，特にこの等距離の別表現として，任意の $x^*\in X^*$ に対し

$$\min_{y^*\in Y^\perp}\|x^*+y^*\|_{X^*}=\sup_{y\in Y,\|y\|_Y=1}|\langle y,x^*\rangle|. \tag{3.3.8}$$

証明：$T(\widetilde{x^*})=x^*|Y$ が $\widetilde{x^*}$ の代表元 x^* の取り方に依存しないで一意に決まる．事実 $x_1^*\in\widetilde{x^*}$ を任意に取ると $x_1^*-x^*\in Y^\perp$ 故 $(x_1^*-x^*)\,|Y=0$ 又は $x_1^*|Y=x^*|Y$ だからである．次に，$X^*/Y^\perp$ の線形演算の定義と，制限操作 $x^*\mapsto x^*|Y$ の線形性により T の線形性は明らかである．このとき，T が単射であることを示すには，$T(\widetilde{x^*})=0$ なら $\widetilde{x^*}=Y^\perp$，即ち，$x^*\in Y^\perp$ を言えばよい．しかるに $T(\widetilde{x^*})=0$ は $x^*|Y=0$ だから，$x^*\in Y^\perp$ は自明である．関係 (3.3.5) は T が全射なことを示す．最後に，(3.3.4) と (3.3.6) から

$$\|x^*|Y\|_{Y^*}=\|\widetilde{x^*}\|_{X^*/Y^\perp}$$

となり，これは $\|T(\widetilde{x^*})\|_{Y^*}=\|\widetilde{x^*}\|_{X^*/Y^\perp}$ と同義故，確かに T は等距離作用素である．再び上記陳列等式の右辺は (3.3.4) で見ると (3.3.8) の左辺，上記陳列等式の左辺をノルムの定義そのもので書けば，これが (3.3.8) の右辺であるから，等式 (3.3.8) も成立が検証出来た． □

上記一般論を以下のように**具体化**する．即ち Banach 空間 X としては指数 1 の Lebesgue 空間 L_1 にとる．同じく指数 1 の Hardy 空間 H_1 は L_1 の線形閉部分空間の一つである．その中で，$f(0)=0$ 又はそれと同値の条件 $\int_{\mathbb{T}}(f(\zeta)/\zeta)\,d\zeta=0$ となる $f\in H_1$ の全体を $(H_1)_0$ と記せば，これは無論 H_1 の閉線形部分空間である．既出の記号 I は恒等関数 $I(z)=z$ を表すが，これは又唯 1 点からなる零点集合 $\{0\}$ の Blaschke 積とも見做される．これを使って書けば $(H_1)_0=IH_1$ である．これを $X=L_1$ の閉線形部分空間 Y にとる：

$$\begin{cases} X=L_1,\\ Y=IH_1.\end{cases}$$

こうすると，$X=L_1$ の共軛部分空間 $X^*=(L_1)^*=L_\infty$, 即ち $k\in(L_1)^*$ は，実体は $k\in L_\infty$ で，機能は L_1 上の有界線形汎関数として

$$\langle f,k\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(e^{i\theta})k(e^{i\theta})\,d\theta\quad(f\in L_1)$$

である．時としては上の $\langle f,k\rangle$ の実積分表示より下記の複素積分表示の方が好ましい状況も少なくない：

$$\langle f,k\rangle=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{f(\zeta)k(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta.$$

X^* の他に $Y=IH_1$ の消滅空間 $Y^\perp=(IH_1)^\perp$ も重要であった．$\varphi\in(IH_1)^\perp$ を任意にとる．$Y^\perp\subset X^*$ かつ $Y^\perp|Y=0$ だから，条件 $\varphi\in(IH_1)^\perp$ と条件，$\varphi\in L_\infty$ かつ $\langle If,\varphi\rangle=0$ $(f\in H_1)$ とは同値である．$\langle If,\varphi\rangle=0$ に於いて $f(e^{i\theta}):=e^{im\theta}$ $(m\in\mathbf{Z}^+=\mathbb{N}\cup\{0\})$ にとれば $(If)(e^{i\theta})=e^{im\theta}$ $(m\in\mathbb{N})$ であって，$\varphi\in L_\infty$ は

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\varphi(e^{i\theta})e^{im\theta}\,d\theta=0\quad(m\in\mathbb{N})$$

をみたすから $\varphi\in H_\infty$ となる．逆に $\varphi\in H_\infty$ から出発すると，先ず $\varphi\in L_\infty$ は勿論，任意の $f\in H_1$ に対し

$$\langle If,\varphi\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}(If)(e^{i\theta})\varphi(e^{i\theta})\,d\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}f(\zeta)\varphi(\zeta)\,d\zeta=0$$

が，$H_1H_\infty\subset H_1$ より $f\varphi\in H_1$ だから，成立する．こうして，$\varphi\in(IH_1)^\perp$ が出る．故に $Y^\perp=(IH_1)^\perp=H_\infty$ が結論出来る．よって上掲の如くに $X\supset Y$ を取ると必然的に

$$\begin{cases} X^*=L_\infty,\\ Y^\perp=H_\infty\end{cases}$$

となって居る．だから肝心の等式 (3.3.8) は次の形になる：任意の $k \in L_\infty$ を固定するとき，

$$\min_{g\in H_\infty} \|k+g\|_{L_\infty} = \sup_{If\in IH_1, \|If\|_{H_1}=1} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k(e^{i\theta})(If)(e^{i\theta})\, d\theta \right|.$$

こゝで，$f \mapsto If : H_1 \to IH_1$ は全単射，$\mathbb{T}$ 上 $|I| = 1$ だから

$$\|If\|_{H_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left|(If)(e^{i\theta})\right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left|f(e^{i\theta})\right| d\theta = \|f\|_{H_1}$$

である．実積分を複素積分に書き換えると

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k(e^{i\theta})(If)(e^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} k(e^{i\theta}) f(e^{i\theta}) i e^{i\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} k(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta$$

となり，最終的に，求める**双対関係式** (duality relation) は次の形に落ち着く：任意に $k \in L_\infty$ を固定するとき

(3.3.9)
$$\boldsymbol{\min_{g\in H_\infty} \|k+g\|_{L_\infty} = \sup_{f\in H_1, \|f\|_{H_1}=1} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} k(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \right|}.$$

この双対関係式 (3.3.9) を使って H_∞ の極小ノルムの補間関数のノルム評価を行う．即ち，$w \in l_\infty$ を任意に与えたとき，$f(z_j) = w(j)$ $(j \in \mathbb{N})$ となる $f \in H_\infty$ の全体を $\mathscr{F}_w$ とするとき

(3.3.10)
$$M := \sup_{w\in l_\infty,\, \|w\|_{l_\infty}=1} \left(\inf_{f\in\mathscr{F}_w} \|f\|_{H_\infty} \right)$$

を評価する．$w \in l_\infty$ が**殆ど零**，記号では $w \dot{\sim} 0$ と記す，とは，有限個の $j \in \mathbb{N}$ を除けば，それ以外のすべての $j \in \mathbb{N}$ で $w(j) = 0$ となることとする．この様な $w \in l_\infty$ の全体を記号 $\dot{l}_\infty$ と示す．本命は (3.3.10) の M の評価にあるが，補助的に

$$\dot{M} = \sup_{w\in \dot{l}_\infty,\, \|w\|_{l_\infty}=1} \left(\inf_{f\in\mathscr{F}_w} \|f\|_{H_\infty} \right)$$

を考えこれを評価する．仮に $\dot{M} < \infty$ としてみる．任意に与えた $w \in l_\infty$，$\|w\|_{l_\infty} \leqq 1$ に対して，各 $N \in \mathbb{N}$ に対し w_N を $w_N(j) = w(j)$ $(1 \leqq j \leqq N)$ かつ $w_N(j) = 0$ $(j > N)$ で定めると $w_N \in \dot{l}_\infty$ $(N \in \mathbb{N})$ である．すると各 $N \in \mathbb{N}$ に対し

$$\inf_{f\in\mathscr{F}_{w_N}} \|f\|_{H_\infty} \leqq \dot{M}$$

であるから，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\varphi_n \in \mathscr{F}_{w_N}$ で $\|\varphi_n\|_{H_\infty} \leqq \dot{M} + 1/n$ となるものがとれる．Montel の定理で $\mathscr{F}_{w_N}$ は正規族を作るから，$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列で，或る $\psi_N \in \mathscr{F}_{w_N}$ へ $\mathbb{D}$ 上局所一様収束するものがとれる．すると

$$\|\psi_N\|_{H_\infty} \leqq \dot{M} \quad (\psi_N \in \mathscr{F}_{w_N})$$

である．再び $(\psi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ に Montel の定理を使えば，$\mathbb{N}$ の等終部分列 $\mathbb{N}'$ があって $(\psi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ は或る $\mathbb{D}$ 上の正則関数 f_w に $\mathbb{D}$ 上局所一様収束する．勿論

$$\|f_w\|_{H_\infty} \leqq \dot{M}$$

であり，任意の $m \in \mathbb{N}$ をとり $m < N \in \mathbb{N}'$ とするとき，$\psi_N(z_j) = w(j)$ $(1 \leqq j \leqq m < N \in \mathbb{N}')$ であるから，$N \in \mathbb{N}'$ かつ $N \nearrow \infty$ として

$$f_w(z_j) = w(j) \quad (j \in \mathbb{N})$$

がわかる，即ち

$$\|f_w\|_{H_\infty} \leqq \dot{M} \quad (f_w \in \mathscr{F}_w)$$

となる．これは任意の $w \in l_\infty$, $\|w\|_{l_\infty} = 1$ で成り立つから，結局 $M \leqq \dot{M}$ がわかる．これは $\dot{M} < \infty$ として導いたが $\dot{M} = \infty$ なら無論 $M \leqq \dot{M}$ で，これは $\dot{M}$ の有限か否かにかかわらず成立する．自明な関係 $\dot{M} \leqq M$ と合わせて $M = \dot{M}$ となる．即ち (3.3.10) の M は

(3.3.11)
$$M = \sup_{w \in \dot{l}_\infty,\, \|w\|_{l_\infty}=1} \left(\inf_{f \in \mathscr{F}_w} \|f\|_{H_\infty} \right)$$

によって計算出来ることになる．

一様分離示数 $0 < \delta < 1$ の $\mathbb{D}$ 内の点列 $\Lambda = \{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ に対して，何度も繰り返して来た様に，その Blaschke 積を B, $\Lambda_l = \{z_j\}_{j \in \mathbb{N} \setminus \{l\}}$ の Blaschke 積を B_l とする：

$$B(z) = \prod_{j \in \mathbb{N}} \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}, \qquad B_l(z) = \prod_{j \in \mathbb{N} \setminus \{l\}} \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z} \quad (l \in \mathbb{N}).$$

さて $w \in \dot{l}_\infty$ で $\|w\|_{l_\infty} = 1$ である w を任意にとりそれを固定することから出発する．

$$h(z) := \sum_{j \in \mathbb{N}} w(j) \frac{B_j(z)}{B_j(z_j)}$$

を考えると $h \in \mathscr{F}_w$ である．実は $w \in \dot{l}_\infty$ だから上の右辺は有限和に過ぎないから意味がある．当たり前のことなのでこれ一回だけで以後同種の注意は繰り返さぬ．そして

$$k(z) := \frac{h(z)}{B(z)}$$

と置く．これは $\mathbb{D}$ 全体では有界でないが $\mathbb{T}$ 上 $k = k(e^{i\theta})$ で考えて，$k \in L_\infty$ である．任意にとった $g \in H_\infty$ を使って

$$f(z) := h(z) + B(z)g(z)$$

とおくと $f \in \mathscr{F}_w$ である．こうして定めた $g \mapsto f : H_\infty \to \mathscr{F}_w$ は全単射である．さて

$$\|f\|_{H_\infty} = \|h + Bg\|_{L_\infty} = \|Bk + Bg\|_{L_\infty} = \|B(k+g)\|_{L_\infty} = \|k + g\|_{L_\infty}$$

であるから

$$\inf_{f \in \mathscr{F}_w} \|f\|_{H_\infty} = \inf_{g \in H_\infty} \|k + g\|_{L_\infty}$$

となって，お待ち兼ねの双対関係式 (3.3.9) の左辺の登場である．しからば，その右辺を使って

(3.3.12)
$$\inf_{f \in \mathscr{F}_w} \|f\|_{H_\infty} = \sup_{g \in H_1,\, \|g\|_{H_1}=1} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} k(\zeta) g(\zeta)\, d\zeta \right|$$

となる．$B(z) = ((z - z_j)/(1 - \bar{z}_j z))\, B_j(z)$ より $B_j(z) = (1 - \bar{z}_j z) B(z)/(z - z_j)$ だから

$$k(\zeta) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{w(j)}{B_j(z_j)} \cdot \frac{(1 - \bar{z}_j \zeta) B(\zeta)}{\zeta - z_j}$$

となっている．故に Cauchy の積分公式により

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} k(\zeta) g(\zeta)\, d\zeta &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{w(j)}{B_j(z_j)} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{(1 - \bar{z}_j \zeta) B(\zeta) g(\zeta)}{\zeta - z_j}\, d\zeta \right) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{w(j)}{B_j(z_j)} (1 - \bar{z}_j z_j) B(z_j) g(z_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{w(j)}{B_j(z_j)} B(z_j) (1 - |z_j|^2) g(z_j) \end{aligned}$$

である．従って，$|B_j(z_j)| \geqq \delta$, $|w(j)| \leqq 1$, 及び $|B(z_j)| \leqq 1$ により

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} k(\zeta) g(\zeta)\, d\zeta \right| \leqq \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{|w(j)|}{|B_j(z_j)|} |B(z_j)| (1 - |z_j|^2) |g(z_j)| \leqq \frac{1}{\delta} \sum_{j \in \mathbb{N}} (1 - |z_j|^2) |g(z_j)|$$

となる．ここで Carleson の埋蔵定理の評価式 (2.2.7), 即ち

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\left(1-|z_j|^2\right)|g(z_j)| \leqq \beta\,\|g\|_{H_1} \leqq \beta$$

に訴えて，結局 (3.3.12) の右辺は β/δ 以下であることがわかり，(3.3.12) と (3.3.11) と見較べて，(3.3.10) を再掲すれば

$$M := \sup_{w\in l_\infty,\,\|w\|_{l_\infty}=1}\left(\inf_{f\in\mathscr{F}_w}\|f\|_{H_\infty}\right) \leqq \frac{\beta}{\delta} \tag{3.3.13}$$

が最終的な評価式である．因みに，上式は元々の Carleson の補間定理：$\Lambda=\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ の一様分離性 $\Leftrightarrow T_\infty(H_\infty)=l_\infty$，の $\Rightarrow$ 部分の証明も与えている．しかも解 $f\in\mathscr{F}_w$ の極小ノルム $\|f\|_{H_\infty}$ は $\|w\|_{l_\infty}=1$ である $w\in l_\infty$ の取り方に依存せず β/δ 以下であること迄言っている．これは $\Rightarrow$ 部分の証明の見地からは遣り過ぎであるが遣り過ぎ序でに補間級数の構成迄行くのは，好機に恵まれたら誰にでも出来たことで，その幸運の人が偶々 P. Beurling であったに過ぎない等と嘯く事を，古来コロンブスの卵と言う．

さて本小節の目標である (3.3.1)–(3.3.3) をみたす関数列 $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ の構成に入る．任意の $n\in\mathbb{N}$ と任意の正数 $\varepsilon>0$ を暫時固定する．$(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ の構成の前段階として，次の様な関数列 $(f_j)_{1\leqq j\leqq n}$ $(n\in\mathbb{N})$ を作る：各 $f_j\in H_\infty$ $(1\leqq j\leqq n)$; $f_j(z_k)=\delta_{jk}$ $(1\leqq j,k\leqq n)$;

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\sum_{j=1}^{n}|f_j(z)| \leqq M^2+\varepsilon.$$

以下の極度に初等的ながら誠に巧みな芸当は関数環論で開発された技術であるそうだ．1 の n 乗根 $\omega=e^{2\pi i/n}$ を取る．又 $(M+\varepsilon_1)^2\leqq M^2+\varepsilon$ となる正数 $\varepsilon_1>0$ も固定する．すると $g_j\in H_\infty$ $(j=1,\cdots,n)$ で

$$\begin{cases} g_j(z_k)=\omega^{jk} \quad (1\leqq j,k\leqq n), \\ \|g_j\|_{H_\infty}<M+\varepsilon_1 \quad (1\leqq j\leqq n) \end{cases}$$

となるものが存在することは (3.3.11) 及び (3.3.13) 等が保証する．そこでお目当ての f_j $(1\leqq j\leqq n)$ を

$$f_j(z) := \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega^{-jk}g_k(z)\right)^2 \quad (j=1,\cdots,n)$$

で定める．H_∞ が環であるから $(1/n)\sum_{k=1}^{n}\omega^{-jk}g_k\in H_\infty$ よりその平方である $f_j\in H_\infty$ $(1\leqq j\leqq n)$ である．以下の作業は高 3 の数学の時間で単純計算の遂行に過ぎぬ．$f_j(z_l)=\delta_{jl}$ の確認から**作業開始**.

$$f_j(z_j)=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega^{-jk}g_k(z_j)\right)^2=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega^{-jk}\omega^{kj}\right)^2=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1\right)^2=1^2=1.$$

次に $l\neq j$ の場合を見る．$\omega^{(l-j)n}=\omega^{n(l-j)}=e^{2\pi i(l-j)}=1^{l-j}=1$ に注意して

$$\sum_{k=1}^{n}\omega^{(l-j)k}=\omega^{l-j}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{(l-j)k}=\omega^{l-j}\frac{1-\omega^{(l-j)n}}{1-\omega^{l-j}}=0$$

がわかる．これより

$$f_j(z_l)=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega^{-jk}g_k(z_l)\right)^2=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega^{-jk}\omega^{kl}\right)^2=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega^{(l-j)k}\right)^2=0^2=0$$

となり $f_j(z_l)=\delta_{jl}$ の**確認作業終了**．最後の条件も，

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}|f_j(z)| &= \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega^{-jk}g_k(z)\right|^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\omega^{-jk}g_k(z)\right)\left(\sum_{l=1}^{n}\omega^{jl}\overline{g_l(z)}\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k,l}^{1,\cdots,n}g_k(z)\overline{g_l(z)}\,\omega^{(l-k)j} = \frac{1}{n^2}\sum_{k,l}^{1,\cdots,n}g_k(z)\,\overline{g_l(z)}\,\sum_{j=1}^{n}\omega^{(l-k)j}\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k,l;k=l}^{1,\cdots,n}|g_k(z)|^2\sum_{j=1}^{n}1+\frac{1}{n^2}\sum_{k,l;k\neq l}^{1,\cdots,n}g_k(z)\,\overline{g_l(z)}\,\sum_{j=1}^{n}\omega^{(l-k)j}\\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k,l;k=l}^{1,\cdots,n}|g_k(z)|^2\right)\cdot n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|g_k(z)|^2\\
&\leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(M+\varepsilon_1)^2 = (M+\varepsilon_1)^2 \leqq M^2+\varepsilon
\end{aligned}
$$

により満たされることがわかる．こうして各 $n\in\mathbb{N}$ と任意正数 $\varepsilon>0$ に対し，$(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 構成の為の補助関数列 $(f_j)_{1\leqq j\leqq n}$ が製造された．

所求関数列 $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 構成の最終段階に入る．任意に正数 $\varepsilon>0$ を選び，しかしその後最後迄終始固定する．各 $n\in\mathbb{N}$ に対し長さ n の有限関数列 $(f_{n,j})_{1\leqq j\leqq n}$ を

$$
\begin{cases}
f_{n,j}\in H_\infty \quad (j=1,\cdots,n),\\
f_{n,j}(z_k)=\delta_{jk} \quad (1\leqq j,k\leqq n),\\
\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|f_{n,j}(z)|\leqq M^2+\varepsilon \quad (z\in\mathbb{D})
\end{cases}
$$

となる様に取ることが出来る所迄話は進んで居た．$f_{i,j}$ を (i,j) 要素に持つ左下三角無限行列 A_0 を考える：

$$
A_0=\begin{pmatrix}
f_{1,1} & & & & & & \\
f_{2,1} & f_{2,2} & & & & & \\
f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & & & & \\
f_{4,1} & f_{4,2} & f_{4,3} & f_{4,4} & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}.
$$

どの要素 $f_{i,j}$ $(i\geqq j)$ も $|f_{i,j}|\leqq M^2+\varepsilon$ だから，$\{f_{i,j}:i\geqq j\}$ は H_∞ の一様有界部分集合故，Montel の定理により，これは正規族を作る．A_0 の第 1 列 $(f_{j,1})_{j\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{D}$ 上局所一様収束部分列 $(f_{j,1})_{j\in\mathbb{N}_1}$ を含む．$\mathbb{N}_1$ は $\mathbb{N}$ の等終部分列である．$(f_{j,1})_{j\in\mathbb{N}_1}$ の極限 $F_1\in H_\infty$ である：

$$F_1:=\lim_{n\in\mathbb{N}_1,n\to\infty}f_{n,1}\in H_\infty \quad (\mathbb{D}\text{ 上局所一様}).$$

行列 A_0 からすべての第 j 行 $(j\in\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}_1)$ を取り除いて出来る行列を A_1 とする．A_1 の第 2 列 $(f_{j,2})_{j\in\mathbb{N}_1,j\geqq 2}$ は局所一様収束部分列 $(f_{j,2})_{j\in\mathbb{N}_2}$ を含む．$\mathbb{N}_2$ は $\mathbb{N}_1\cap\{j\geqq 2\}$ の等終部分列である．$(f_{j,2})_{j\in\mathbb{N}_2}$ の極限 $F_2\in H_\infty$ である：

$$F_2:=\lim_{n\in\mathbb{N}_2,n\to\infty}f_{n,2}\in H_\infty \quad (\mathbb{D}\text{ 上局所一様}).$$

A_1 からすべての第 j 行 $(j\in\mathbb{N}_1\backslash\mathbb{N}_2)$ の 2 列及び 2 列から先の部分を取り除いて出来る行列を A_3 とする．以下この手続を繰り返して，番号集合列

$$\mathbb{N}\supset\mathbb{N}_1\supset\mathbb{N}_2\supset\cdots\supset\mathbb{N}_n\supset\mathbb{N}_{n+1}\supset\cdots,$$

及び関数列 $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ を

$$F_m := \lim_{n\in\mathbb{N}_m, n\to\infty} f_{n,m} \in H_\infty \quad (\mathbb{D} \text{ 上局所一様})$$

で定め，更に行列の列 $A_0, A_1, A_2, A_3, \cdots, A_m, \cdots$ を作る．大事なことは，任意に $N \in \mathbb{N}$ を固定するとき，A_N の第 N 列の任意の元 $f_{k,N}$ $(k \in \mathbb{N}_N)$ をとるとき，第 k 行の最初の N 個

$$f_{k,1}, f_{k,2}, \cdots, f_{k,N-1}, f_{k,N}$$

は A_N の中で生き残って居り

$$\sum_{1\leqq j\leqq N} |f_{k,j}(z)| \leqq \sum_{1\leqq j\leqq k} |f_{k,j}| \leqq M^2 + \varepsilon$$

である．$k \in \mathbb{N}_N \subset \mathbb{N}_{N-1} \subset \cdots \subset \mathbb{N}_1$ から，$1 \leqq j \leqq N$ なら各 $(f_{k,j})_{k\in\mathbb{N}_N}$ が $\mathbb{D}$ 上局所一様に F_j に収束するので $\sum_{j=1}^N |f_{k,j}| \leqq M^2 + \varepsilon$ $(k \in \mathbb{N}_N)$ に於いて $k \to \infty$ とすることにより

$$\sum_{m=1}^N |F_m| \leqq M^2 + \varepsilon$$

となる．N の任意性により $\sum_{m\in\mathbb{N}} |F_m| \leqq M^2 + \varepsilon$，即ち $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ は (3.3.3) を満足する．(3.3.1) の成立は言う迄ない．最後に (3.3.2) : $F_m(z_l) = \delta_{ml}$ $(m, l \in \mathbb{N})$ はどうか．A_0 の第 m 列の $\mathbb{D}$ 上の局所一様収束部分列 $(f_{j,m})_{j\in\mathbb{N}_m}$ をとる．$f_{j,m}(z_m) = 1$ より，$j \in \mathbb{N}_m, j \to \infty$ として $F_m(z_m) = 1$ である．次に任意の z_l $(l \neq m)$ を考える．$j \in \mathbb{N}_m$ で $j > l$ となると $f_{j,m}(z_l) = 0$ であるから，$j \in \mathbb{N}_m, j > l, j \to \infty$ として $F_m(z_l) = 0$ が結論される．即ち (3.3.2) も満たされる．こうして求める $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ の構成とその正当性の確認が終わる． $\square$

参 照 文 献

[1] F. Albiac and N. J. Kalton: *Topics in Banach Space Theory,* Graduate Texts in Mathematics **233**, Springer, 2006.

[2] S. Banach: *Théorie des Opérations linéaires,* Monografje Matematyczne, Warsaw, 1932

[3] L. Carleson: *Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem,* Proc. Internat. Congr. Math. Stockholm, 1962, pp.314–316.

[4] L. Carleson: *Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem,* Ann. of Math., **76**(1962), 547–559.

[5] N. Dunford and J. T. Schwartz: *Linear Operators* (Part I: General Theory), Pure and Applied Mathematics, Vol. **7**, Interscience Publishers, 1967.

[6] P. L. Duren: *Theory of H^p Spaces,* Dover Books on Mathematics, Dover Publication, Inc., New York, 2000.

[7] S. D. Fisher: *Function Theory on Planar Domains,* A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts, John Wiley and Sons, 1982.

[8] J. B. Garnett: *Bounded Analytic Functions,* Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 1981.

[9] M. Hasumi: *Hardy Classes on Infinitely Connected Riemann Surfaces,* Lecture Notes in Math., Vol.**1027**, Springer, 1983.

[10] M. Hasumi: *Hardy Classes on Riemann Surfaces,* Uchida Rokakuho Publishing co., Ltd., 2010 (in Japanese).

[11] P. R. Halmos: *Measure Theory,* D. Van Nostrand, 1950.

[12] M. Heins: *Hardy Classes on Riemann Surfaces,* Lecture Notes in Math., Vol.**98**, Springer, 1969.

[13] K. Hoffman: *Bounded analytic functions and Gleason parts,* Ann. of Math., **86**(1967), 74–111.

[14] J. Hoffman-Jϕrgensen: *Sums of independent Banach space valued random variables,* Studia Math., **52**(1974), 159–186.

[15] V. Kabaĭla: *Refinement of some theorems on interpolation in the class H_δ,* Vilniaus Univ. Darbai **33**, Mat.-Fiz., **9**(1960), 15–19 (in Lithuanian)

[16] V. Kabaĭla: *Interpolation sequences for the H_p classes in the case $p < 1$,* Litovsk. Mat. Sb. **3**(1963), 141–147 (in Russian)

[17] J. P. KAHANE: *Sur les sommes vectorielles* $\sum \pm u_n$, C. R. Acad. Sci. Paris, **259**(1964), 2577–2580.

[18] A. KHINTCHINE: *Über dyadische Brüche,* Math. Z., **18**(1923), 109–116.

[19] A. KHINTCHINE AND A. N. KOLMOGOROFF: *Über Konvergenz von Reihen, dieren Glieder durch den Zufall bestimmt werden,* Math. Sb., **32**(1925), 668–677.

[20] P. KOOSIS: *Introduction to* H_p *Spaces,* Cambridge Univ. Press, 1980.

[21] J. E. LITTLEWOOD: *On bounded bilinear forms in n infinite number of variables,* Q. J. Math. (Oxford), **1**(1930), 164–174.

[22] B. MAUREY: *Type, cotype and K-convexity,* Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. **2**, North-Holland, Amsterdam, (2003), 1299–1332.

[23] B. MAUREY AND G. PISIER: *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach,* Studia Math., **58**(1976), 45–90.

[24] M. NAKAI: *The Banach linear dimension for Banach spaces of bounded analytic functions on open Riemann surfaces,* Preprint.

[25] M. NAKAI AND J. NARITA: *The isomorphism theorem of Lebesgue spaces,* Bull. Daido Univ., **48**(2012), 1–30 (in Japanese).

[26] M. NAKAI AND J. NARITA: *Types and cotypes of contracted Banach spaces,* Bull. Daido Univ., **49**(2013), 1–38 (in Japanese).

[27] C. W. NEVILLE: *A short proof of an inequality of Carleson's,* Proc. Amer. Math. Soc., **65**(1977), 131–132.

[28] G. NORDLANDER: *On sign-independent and almost sign-independent convergence in normed linear spaces,* Ark. Mat., **4**(1962), 287–296.

[29] W. ORLICZ: *Über unbedingte Konvergenz in Funktionräumen I,* Studia Math., **4**(1933), 33–37.

[30] W. ORLICZ: *Über unbedingte Konvergenz in Funktionräumen II,* Studia Math., **4**(1933), 41–47.

[31] M. PARREAU: *Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et classifications des surfaces de Riemann,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **3**(1951), 103–197.

[32] H. RADEMACHER: *Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen,* Math. Ann., **87**(1922), 112–138.

[33] L. SARIO AND M. NAKAI: *Classification Theory of Riemann Surfaces,* Die Grundlehrer der mathematischen Wissenschaften in Einzelldarstellungen, Band **164**, Springer-Verlag, 1970.

[34] A. SCHUSTER AND K. SEIP: *A Carleson-type condition for interpolation in Bergman spaces,* J. Reine Angew. Math., **497**(1998), 223–233.

[35] S. H. SHAPIRO AND A. L. SHIELDS: *On some interpolation problems for analytic functions,* Amer. J. Math., **83**(1961), 513–532.

[36] K. YOSIDA: *Functional Analysis,* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzelldarstellungen, Band **123**, Springer-Verlag, 1965.