最小定和の素数魔方陣の検索

Finding Magic Squares of Prime Numbers with Minimum Constant

大石弥幸*

Yasaki Oishi

Summary

A magic square including only prime numbers is the well known problem.　Though some magic squares of consecutive prime numbers are seen frequently, those of non-consecutive prime numbers are rare. In this paper magic square of non-consecutive prime numbers those have minimum constants are calculated.　Magic squares of high order require long time to calculate by computers.　In order to shorten the time Monte Carlo Tree Search is introduced.　And magic square of non-consecutive prime numbers of order 5th,6th,7th,8th and 9th are found.

キーワード：　魔方陣，素数，整数，最小定和，モンテカルロ木探索

Keywords：　Magic square, Prime number, Minimum constant sum, Monte Carlo tree search

1．魔方陣

1.1　魔方陣とは

魔方陣とは 3 以上の整数 n について、n 行 n 列の行列に 1〜n^2 の整数を置き、すべての行、列、および 2 つの対角線上の数の和を等しくするものである。n 行 n 列の魔方陣は n 次魔方陣、$n\times n$ 魔方陣などと表記される。3 次、4 次、5 次の魔方陣の例を図 1 に示す。同様に 6 次以上の魔方陣が存在する。

数学的には整数解に限定する多元連立方程式である。和が同じ値（定和という）だという式が n 行と n 列と 2 対角線あるが、そのうちの 1 本は独立ではないので実質 $2n+1$ 本の式が与えられる。これは未知数の個数 n^2 に対して不足しているため解は不定となるが、1〜n^2 の整数という条件のため有限個数の解が存在する。

最小次の 3 次魔方陣は古くから知られ、今でも子供向けパズルとして出題されることがある。しかし、4 次以上は急に難しくなるので、歴史的に見ても多くの人の頭を悩ませる問題となっている。それでも、解の検索に関しては、特殊な配列以外は未だに効率的なアルゴリズムは発見されず虱潰し的な計算を行うしかない。

2	9	4
7	5	3
6	1	8

9	15	2	8
14	1	16	3
7	6	11	10
4	12	5	13

9	1	24	13	18
10	22	6	12	15
7	23	2	25	8
20	14	17	11	3
19	5	16	4	21

図 1　魔方陣の例

そのような事情から学術的な論文で魔方陣が扱われることも少なく、いわゆるパズル愛好家による散発的な研究が中心となっている。そのため既存研究の範囲もはっきり分からないことが多い。

1.2　魔方陣の解の総数

魔方陣の研究のなかでも大きなテーマは、解の総数がいくつなのかである。たとえば 3 次魔方陣はちょっとした計算で 8 通りの解を得ることができる。ただし、それらはすべて回転や裏返しで互いに同じものとなり，本質的に解は 1 つだけである。

* 大同大学情報学部情報システム学科

表１　魔方陣の総数

次数	解の総数
3	1
4	880
5	275,305,224
6	約 1.8×10^{19}

そこで魔方陣の総数を論議する場合は回転、裏返しで重なるものは１つと数えることを原則としている。

次数ごとの魔方陣総数は現在までに表 1 のように算出されている。

3 次の魔方陣は古代から知られ、解が 1 つしか存在しないことは魔方陣が神秘的なものとされたことにも関係している。

4 次については 19 世紀までにすべて手計算で求められた。しかし 5 次の総数は 1970 年になってアメリカの Richard Schroepell によってはじめて確認された[1]。方法はコンピュータで時間をかけて全部の解を求めたのである。四色問題[2]がコンピュータの計算力頼りの方法で証明されたのとほぼ同時期であり、証明へのコンピュータの利用の是非が問われた。

同様にして 6 次魔方陣の計算が考えられたが、それはすぐに不可能だとわかる。単純な総当り的計算では現在のスーパーコンピュータの速度でも天文学的な時間を要する。そのため正確な総数は不明であるが、筆者は 1992 年にランダムサンプリング（モンテカルロ法）を用いた推定値として 1800 京を発表した[3]。後の 1998 年にはドイツの K.Pinn と C.Wieczerkowski もほぼ同じ数（1.775×10^{19}）を出している[4]。また彼らは 7 次についても推定値を出しているがさらに莫大な数となる。

コンピュータの計算速度の進歩は著しい。Shroepell が 1970 年に 5 次の全解を出すのにミニコンで 1000 時間以上かかったとある。しかし今ならスーパーコンピュータを使わずとも，手元の普通のパソコンで 20～30 分で計算できる（10 分という報告もある[5]）。しかしそれでも 6 次以上の魔方陣にはまったく歯が立たない。

1．3　１～n^2 以外の数の魔方陣

パズル愛好家たちが基本的な魔方陣の次に考えたのは、魔方陣の中でさらに特定の条件を満たすものを探すことであった。たとえば行、列、２対角線に加えて汎対角線（方陣の左端と右端、上端と下端がつながっているトーラスでの斜行周）の和も等しいもので、これを完全魔方陣と呼んだ。また魔方陣の中に含まれる部分方陣も行、列、２対角線の和が一定になるという内包魔方陣なども求められた[6][7]。

もう一方の拡張は使用する整数を１～n^2 ではなく、特定の性質をもった数に置き換ええることであった。たとえば、素数、平方数などである。数学的でない例も挙げるなら、16 種類の切手を配置して額面の和を等しくして 4 次魔方陣に見立てるというものもある。

さて、ここではこれらの中でも最も多くの研究がみられる素数を使う魔方陣について述べる。

2. 素数魔方陣とは

素数魔方陣とは素数のみを使って n 行 n 列の行､列､２対角線の和を等しくするものである。歴史的にみると､古くは 1900 年頃から文献を見つけることができる。ただ、その当時は 1 を素数とみなしているため正確には素数魔方陣ではない。コンピュータのない時代には素数魔方陣を見つけるのが困難で､1 を許容することによってかなり易しくできたからであろう。しかし、ここでは 1 は素数としないで考える。

つぎに素数魔方陣と称するものの中には、暗黙に連続した素数を使うとい条件が含まれているものが多い。これは見た目に美しいということもあるが、実は計算量を減らすための条件でもある。連続素数であれば最小の素数を決めれば全部の素数が決まる。しかし、非連続では、いろいろな組み合わせを試す必要があるため検索範囲が膨大になってしまうのである。ここでは連続という条件があるか否かを明確に区別して説明する。

いずれの条件においても素数は無限に存在するため解も無限に存在すると考えられる。その中で最初に見つけておきたいのは定和が最小になるものである。以下、最小定和の素数魔方陣についてのみ述べる。

3　連続素数魔方陣

素数魔方陣では唯一の偶数素数である 2 が使えないことは明らかであるから 3 以上の素数を使うことになる。しかし、3 から小さい順に n^2 個の素数を使っても常に魔方陣ができるわけではない。n^2 個の総和は定和の n 倍なので、総和が n の倍数でない場合は除外できる。だが、総和が n の倍数の場合でも魔方陣が可能かどうかは簡単にはわからない。その定和での解の存在証明は１つでも解を見つければよいが、存在しないことを証明するのは非常に難しい。演繹的に証明する方法は知られていない。そのため、全組み合わせを計算して解の不在を証明しなければならない。

それでも遅くとも 1970 年代頃には 4 次から 9 次の

最小定和の連続素数魔方陣は発見されている[6]。これらは魔方陣の愛好家の間では知られる鈴木昭雄氏と阿部楽方氏の仕事であった。さらに高次の連続素数魔方陣は、最近インターネット上の個人のホームページに公表されている[8]。4 次から 9 次までの連続素数魔方陣を例を図 2 に示す。

37	97	83	41
89	59	67	43
53	71	61	73
79	31	47	101

4 次連続　sum=258

13	83	89	109	19
107	17	43	67	79
29	59	113	41	71
103	53	37	73	47
61	101	31	23	97

5 次連続　sum=313

7	167	149	109	41	11
157	13	59	17	107	131
67	31	151	101	97	37
61	103	83	71	29	137
53	43	23	113	163	89
139	127	19	73	47	79

6 次連続　sum=484

7	139	179	173	47	181	71
67	31	107	131	239	73	149
53	229	97	167	113	127	11
227	109	17	101	83	157	103
233	19	163	59	211	23	89
13	79	193	29	61	199	223
197	191	41	137	43	37	151

7 次連続　sum=797

79	281	313	107	439	137	311	349
431	113	331	271	97	223	353	197
277	397	127	131	263	233	359	229
373	199	193	389	83	419	181	179
163	101	383	151	421	337	167	293
157	401	173	409	307	191	239	139
103	241	269	211	257	367	317	251
433	283	227	347	149	109	89	379

8 次連続　sum=2016

37	347	263	281	353	79	227	383	241
449	43	317	257	431	83	197	97	337
439	311	179	41	211	223	283	151	373
157	421	331	443	73	433	101	191	61
89	409	397	53	47	109	467	401	239
251	277	59	419	379	479	127	113	107
269	103	139	67	229	463	461	167	313
131	163	293	457	181	71	199	349	367
389	137	233	193	307	271	149	359	173

9 次連続　sum=2211

図 2 連続素数魔方陣

さてここまで、3 次については触れなかったが、3 次の連続素数魔方陣だけは例外的に非連続素数魔方陣よりも発見が困難であった。1988 年に発表されたその最小定和の解は図 3 の通りで、最小といっても非常に大きな数となっている[9]。コンピュータなしでは発見は難しかっただろう。

1480028201	1480028129	1480028183
1480028153	1480028171	1480028189
1480028159	1480028213	1480028141

3 次連続　sum= 4440084513

図 3　3 次連続素数魔方陣

4. 非連続素数魔方陣

4.1　既知の非連続素数魔方陣

非連続素数魔方陣については連続魔方陣に比べると公表されている記事が少ない。それでも 3、4 次までは簡単な計算なので、誰が見つけたというほどのこともなく、最小定和の解を見つけることができる。最小定和の 3、4 次非連続魔方陣を図 4 に示す。

しかし、5 次以上は論文、インターネットでは最少定和の魔方陣を見つけることはできなかった。

4.2　最少定和の証明

素数魔方陣が見つかったとして、それが最少定和であることを示すためには、それより小さい定和では魔方陣がないことを全検索して示す。3 次、4 次では素数の個数が少ないのと値が小さいことから、計算量はそれほど多くない。しかし、5 次以上になると個数も値も大きくなるので計算量が莫大になることが予想される。これについては後でわかるが、5 次から 9 次までは総和が n の倍数という条件を満たす候補の中の最初（和が最少）の組み合わせで解が発見された。したがって、その候補より小さい定和での解の不在証明は不要であった。

17	113	47
89	59	29
71	5	101

3 次非連続　sum=177

3	61	19	37
43	31	5	41
7	11	73	29
67	17	23	13

4次非連続　sum=120

図 4　3 次，4 次非連続素数魔方陣

3	79	43	103	5
71	11	7	61	83
67	47	89	17	13
73	59	41	29	31
19	37	53	23	101

3	89	83	53	5
97	13	23	59	41
19	67	79	61	7
71	47	11	31	73
43	17	37	29	107

3	37	83	103	7
101	31	17	11	73
29	53	67	5	79
41	89	19	71	13
59	23	47	43	61

5	89	73	59	7
101	11	13	41	67
79	3	71	61	19
17	83	53	43	37
31	47	23	29	103

５次非連続　sum=233

3	149	29	137	73	41
167	11	97	13	17	127
5	19	131	73	101	103
107	43	109	89	23	61
71	113	7	37	151	53
79	97	59	83	67	47

3	107	71	131	101	19
139	13	11	137	23	109
41	73	167	31	97	23
37	97	149	43	17	89
61	59	5	67	127	113
151	83	29	23	67	79

5	149	41	137	89	11
97	17	167	43	29	79
97	7	71	113	103	41
11	97	109	61	47	107
83	31	41	59	151	67
139	131	3	19	13	127

5	149	61	151	47	19
7	23	67	101	127	107
137	71	103	11	13	97
79	17	167	73	59	37
137	41	3	29	139	83
67	131	31	67	47	89

6 次非連続　sum=432

3	137	239	131	67	43	113
101	17	197	31	151	139	97
107	163	181	211	7	41	23
83	157	71	103	37	173	109
199	13	11	179	191	61	79
73	193	29	19	47	149	223
167	53	5	59	233	127	89

5	199	113	223	19	131	43
163	17	107	37	101	127	181
41	179	73	193	83	157	7
89	79	233	139	13	31	149
239	61	23	3	211	137	59
29	151	173	71	109	97	103
167	47	11	67	197	53	191

7	67	89	193	139	191	47
23	31	83	233	11	173	179
223	199	107	17	109	59	19
167	149	61	197	3	5	151
79	131	41	43	157	181	101
97	29	239	13	211	71	73
137	127	113	37	103	53	163

7 次非連続　sum=733

3	139	263	107	47	257	277	61
193	31	179	233	19	137	163	199
251	229	71	97	223	37	79	167
43	149	109	239	331	127	53	103
241	13	283	151	173	131	73	89
11	271	29	17	181	269	59	317
311	281	197	83	113	5	157	7
101	41	23	227	67	191	293	211

5	263	211	163	67	311	7	127
131	37	31	229	173	257	19	277
103	61	83	241	317	13	293	43
23	11	283	149	193	137	251	107
331	167	151	71	233	113	59	29
181	197	281	109	89	179	17	101
157	227	41	139	3	47	269	271
223	191	73	53	79	97	239	199

7	269	181	223	131	31	229	83
193	61	3	59	277	233	257	71
41	199	101	239	5	191	97	281
241	79	13	311	103	37	107	263
211	173	331	197	113	43	67	19
283	127	47	73	179	139	157	149
11	109	227	29	293	317	151	17
167	137	251	23	53	163	89	271

8 次非連続　sum=1154

3	283	359	17	367	281	61	349	11
109	73	37	157	251	239	431	127	307
433	29	97	313	149	137	317	59	197
331	347	199	131	13	67	193	41	409
229	211	379	311	233	31	89	241	7
47	79	163	167	151	397	227	277	223
107	337	373	23	5	173	269	263	181
389	353	53	191	179	113	43	271	139
83	19	71	421	383	293	101	103	257

5	89	379	431	193	173	359	83	19
313	59	421	47	373	131	53	317	17
233	97	179	293	337	23	137	101	331
139	181	67	223	11	389	263	349	109
307	163	269	43	3	229	151	199	367
103	79	277	353	13	433	157	149	167
211	383	31	107	239	41	241	281	197
347	409	37	227	251	29	113	191	127
73	271	71	7	311	283	257	61	397

9 次非連続　sum=1731

図 5　5～9 次非連続素数魔方陣

4.3　非連続素数魔方陣の検索結果

4.3.1　5 次非連続素数魔方陣

5 次の非連続素数魔方陣では、総和が n の倍数である条件から可能性のある最小定和が 233 となる。それで検索してみると非常に多くの解が求まる。図 5 の最上段がその例である。回転、反転、単純な行列入れ替えを同種としても 184,850 個 の解が出てきた。5 次までであれば、このように全数検索は可能である。計算時間は数十分であった。

4.3.2　モンテカルロ木探索

定和および使う素数の組合せの候補が分かったとしても、6 次以上ではたった 1 つの解を見つけるのも難しい。全検索のアルゴリズムでは大抵、大きさの順に探索していくので最初の方は全く解が出てこない。最初の解が発見されるまでに相当の時間が費やされる。

そこで魔方陣の n^2 個のセルの内のいくつかを事前にランダムに埋めておき、残りのセルを計算するという方法を採用する。これはチェスや将棋の指し手の探索で使われるモンテカルロ木探索と同じ考え方である。将棋と違って最善手を見つけずとも 1 つでも解が見つかればよい。

具体的には 6 次非連続素数魔方陣では、定和として可能性のあるところを探すと、3、5、7、11、13、 …、139、149、151、167 で総和が 2592、定和が 432 となる。その 36 個で魔方陣を構成すればいい。とはいっても 6 次ともなると全数検索は不可能である。そこで、8 個のセルには候補から 8 個の素数をランダムに置いて残りのセルを合わせるという方針をとった。

ランダムに置くわけだからほとんどはその先の計算が行き詰って解は見つからない。それでも組合せを変えて何千、何万回と繰り返すことによって解が出ることを期待する。実際、この計算は早ければ 1 秒以下、遅い場合でも数分で答えが出てくる。

7 次以上の非連続素数魔方陣についても同様の方法で解を探索した。事前にランダムに置くのは 7 次で 49 セル中の 22 セル、8 次の場合は 64 セル中の 27 セル、9 次の場合は 81 セル中の 34 セルである。次数が上がれば計算時間が徐々に増える。それでも 9 次でも 1 時間程度待てば 1 つの解は求められるという程度である。5 次から 9 次までの最小定和の非連続素数魔方陣を図 5 に示す。

5. 最後に

素数魔方陣を連続と非連続に分けて最小定和を求めた。9 次までの素数魔方陣の最小定和を表 2 に示す。連続素数の方は多くの文献やネット上で紹介されているが、非連続の方はなかなか見られない。網掛けの部分は筆者自身が計算して求めた値である。

6 次以上では全解を求めることは当然ながら、たった 1 つの解を見つけるのも容易ではない。そこで適当なセルにランダムに数を配置するという方法を採用した。いかにもいい加減な方法であるが、それでも比較的短時間で解を見つけることができた。

表 2　素数魔方陣の最小定和

次数	非連続	連続
3	177	4440084513
4	120	258
5	233	313
6	432	484
7	733	797
8	1154	2016
9	1731	2211

参考文献

1）Martin Gardner，Magic Square， Scientific American 1976.1

2）一松信，四色問題，講談社ブルーバックス，1978

3）大石弥幸，ランダムサンプリングによる 6 次魔方陣の総数の推定」数芸パズル第 177 号 1992 http://www.daido-it.ac.jp/~oishi/TH5/magics6.pdf

4）K. Pinn, C. Wieczerkowski，Number of Magic Squares From Parallel Tempering Monte Carlo，Int. J. Mod. Phys. C 9 (1998) 541

5）http://blog.unfindable.net/archives/7179

6）平山，阿部，方陣の研究，大阪教育図書，1983

7）大森清美，魔方陣の世界，日本評論社，2013

8）http://www.magic-squares.net/primesqr.htm

9）H. L. Nelson (Journal of Recreational Mathe -matics, 1988, vol. 20:3, p.214

10) 大石弥幸，魔方陣ホームページ， http://www.daido-it.ac.jp/~oishi/TH5/ms.html