単位球上における true biharmonic Bergman kernel に対する下からの評価について

Note on a lower bound estimate for the true biharmonic Bergman kernel over the unit ball

田中　清喜[1]

Kiyoki Tanaka

Summary

We consider the space of all square integrable biharmonic functions on the unit ball, which is called by the biharmonic Bergman space $b_0^{2,2}(\mathbb{B})$. We define the the true biharmonic Bergman space $b_0^{(2),2}(\mathbb{B})$ as $b_0^{(2),2}(\mathbb{B}) := b_0^{2,2}(\mathbb{B}) \ominus b_0^{1,2}(\mathbb{B})$, where $b_0^{1,2}(\mathbb{B})$ is the harmonic Bergman space. In [10], we obtain properties for true polyharmonic Bergman space. In this paper, based on properties in [10], we give a lower bound estimate for the reproducing kernel of the true biharmonic Bergman space[2].

Keywords : polyharmonic Bergman space, true polyharmonic Bergman kernel

1 Introduction

$\mathbb{B}$ を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の開単位球とし, $\mathbb{S}$ を $\mathbb{B}$ の境界とする。$m \in \mathbb{N}$, $\alpha > -1$ に対して weighted polyharmonic Bergman space $b_\alpha^{m,2}(\mathbb{B})$ を

$$b_\alpha^{m,2}(\mathbb{B}) := H^m(\mathbb{B}) \cap L^2(\mathbb{B}, (1-|x|^2)^\alpha dx)$$

と定義する。ここで, $H^m(\mathbb{B})$ は $\mathbb{B}$ 上の polyharmonic functions of degree m 全体の成す空間とする。さらに, weighted true polyharmonic Bergman space $b_\alpha^{(m),2}(\mathbb{B})$ を

$$b_\alpha^{(m),2}(\mathbb{B}) := b_\alpha^{m,2}(\mathbb{B}) \ominus b_\alpha^{m-1,2}(\mathbb{B}) (m \geq 2), b_\alpha^{(1),2}(\mathbb{B}) := b_\alpha^{1,2}(\mathbb{B})$$

と定義する。$b_\alpha^{m,2}(\mathbb{B})$, $b_\alpha^{(m),2}(\mathbb{B})$ は再生核 Hilbert 空間であり, それらの再生核をそれぞれ $R_{m,\alpha}(x,y)$, $R_{(m),\alpha}(x,y)$ と書くことにする。$L^2(\mathbb{B}, (1-|x|^2)^\alpha dx)$ から $b_\alpha^{(m),2}(\mathbb{B})$ への orthogonal projection を Q とするとき,

$$Qf(x) = \int_{\mathbb{B}} R_{(m),\alpha}(x,y) f(y) (1-|y|^2)^\alpha dy \quad f \in L^2(\mathbb{B}, (1-|x|^2)^\alpha dx)$$

となる。一般に Bergman 空間論においては, Toeplitz 作用素 T_ϕ を orthogonal projection P を用いて $T_\phi f = P[\phi f]$ と定義し, ある ϕ の class において operator algebra 構造を与える (例えば [11], [12] を見よ)。この理論を進めるためにも, Q を表す核である $R_{(m),\alpha}(x,y)$ に対して評価を与える必要がある。特に必要とされる評価は $R_{(m),\alpha}(x,y)$ の上からの評価と $R_{(m),\alpha}(x,x)$ の下からの評価である。例えば [3] は harmonic Bergman space on a smooth bounded domain 上に定義した Toeplitz 作用素の特徴づけを再生核の評価のみから与えている。

本論文では $m = 2$ のとき, unweighted true biharmonic Bergman kernel $R_{(2),0}(x,x)$ に対する下からの評価を与える。

---

[1]大同大学教養部数学教室

[2]本研究は, 大同大学学内助成制度である特別研究奨励金の助成を受けたものである。

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 46E15; Secondary 31B05

Theorem 1. *There exists a constant $C > 0$ such that*

$$R_{(2),0}(x,x) \geq \frac{C}{(1-|x|^2)^N}$$

for $x \in \mathbb{B}$.

定理に関する注意としては, harmonic Bergman kernel $R_{1,0}(x,x)$ に対しては評価

$$R_{1,0}(x,x) \approx \frac{C}{(1-|x|^2)^N} \tag{1}$$

となることが知られており (例えば [2] を見よ),

$$R_{m,0}(x,x) = R_{1,0}(x,x) + R_{(2),0}(x,x) + \cdots + R_{(m),0}(x,x)$$

と再生核に対する一般論より $R_{(m),0}(x,x) \geq 0$ であることから, $R_{m,0}(x,x)$ の下からの評価

$$R_{m,0}(x,x) \geq C(1-|x|^2)^{-N}$$

は得られている。

$R_{(m),0}(x,x)$ に対する下からの評価は [10] で与えた $R_{(m),\alpha}(x,y)$ の表示からは扱いづらくいことから得られていなかったが, $m=2$ のときのみ計算によって $R_{(2),0}(x,x)$ の下からの評価を与えることができたため, 大同大学紀要に投稿させていただく。

先行研究としては, 空間の構造という点については Ramazanov[8] が poly-Bergman space と Bergman space の対応を与えている。さらに, Pessoa[7] が poly-Bergman space 間の対応を Beurling-Ahlfors transform と shift operator を合成することによって与えており, それを利用することによって unweighted polyharmonic Bergman space on the unit disc の構造と再生核の表示について言及している。我々の考える空間の定義域は実 N 次元であるため Pessoa の手法は使えないが, 筆者は [10] において実 N 次元の開単位球を定義域とする weighted true polyharmonic Bergman space の正規直交基底を与え, true polyharmonic Bergman kernel $R_{(m),0}(x,y)$ の upper estimate を与えている。本論文では, unweighted true biharmonic Bergman kernel $R_{(2),0}(x,x)$ に対する下からの評価を与えたため, true biharmonic Bergman space 上での Toeplitz 作用素の分類問題を論じる準備が整ったといえる。

2 Calculation of $R_{(2),0}(x,x)$

[10] によって, 次が得られている。

Lemma 2.1.

$$\left\{ C_{\alpha,N,m} G_{m-1}(k+\beta+\frac{N}{2}, k+\frac{N}{2}; |x|^2) e_j^k(x) \right\}_{j=1,\cdots,h_k, k=0,1,\cdots}$$

は $b_\alpha^{(m),2}(\mathbb{B})$ の正規直交基底である。ここで, $\{e_j^k\}$ は k 次同次調和多項式全体の成す空間の基底として特に $L^2(\mathbb{S}, ds)$ 内積で正規化したもの, $G_l(\beta,\gamma;t)$ を $[0,1)$ 区間における *weight function* $t^{\gamma-1}(1-t)^{\beta-\gamma}$ に関する内積に関する直交多項式, 正規化定数 $C_{\alpha,N,m}$ は

$$C_{\alpha,N,m} = \sqrt{\frac{2(k+\beta+\frac{N}{2}+2(m-1))\Gamma(k+\beta+\frac{N}{2}+m-1)\Gamma(k+\frac{N}{2}+m-1)}{|\mathbb{S}|(m-1)!\Gamma(\beta+m)\Gamma(k+\frac{N}{2})^2}}$$

となる。

Lemma 2.2. 作用素 $S_{m,\alpha}f(x) := \Delta_\alpha^{m-1}(1-|x|^2)^{2(m-1)}f(x)$ は $b_\alpha^{1,2}(\mathbb{B})$ から $b_\alpha^{(m),2}(\mathbb{B})$ への有界全単射写像である。

Lemma 2.2 と (1) から

$$
\begin{aligned}
|S_{m,0}[R_{1,0}(x,\cdot)](z)|^2 &= \int_{\mathbb{B}} R_{(m),0}(z,y)S_{m,0}[R_{1,0}(x,\cdot)](y)dy|^2 \\
&\leq \|R_{(m),0}(z,\cdot)\|_{L^2}^2 \|S_{m,0}[R_{1,0}(x,\cdot)]\|_{L^2}^2 \\
&\approx R_{(m),0}(z,z)(1-|x|^2)^{-N}
\end{aligned}
$$

となるため,

$$
R_{(m),0}(x,x) \geq C|S_{m,0}[R_{1,0}(x,\cdot)](x)|^2(1-|x|^2)^N \tag{2}
$$

を満たす定数 $C>0$ が存在する。特に $m=2$ のときは, 単純計算から

$$
S_{2,0}[R_{1,0}(x,\cdot)](x) = \frac{(-N^2+10N-24)|x|^6+(-3N^2+8N+16)|x|^4+(-3N^2-2N)|x|^2-N^2}{|\mathbb{S}|(1-|x|^2)^N}
$$

を得て, 右辺の分子は $x \in \mathbb{B}$ のとき負の定数で上に有界であることから,

$$
|S_{2,0}[R_{1,0}(x,\cdot)](x)| \geq \frac{C_1}{(1-|x|^2)^N} \tag{3}
$$

を満たす $C_1 > 0$ は存在する。(2) と (3) より

$$
R_{(2),0}(x,x) \geq C\left|\frac{C_1}{(1-|x|^2)^N}\right|^2(1-|x|^2)^N \geq \frac{C_2}{(1-|x|^2)^N}
$$

を得る。よって Theorem 1 が得られた。

3 Concluding remarks

前節にて, 我々は true biharmonic Bergman kernel に対する下からの評価を得た。$m \geq 3$ のときの $R_{(m),0}(x,x)$ の評価及び weigthed true polyharmonic Bergman kernel $R_{(m),\alpha}(x,x)$ の評価は技術上証明を与えることができなかっただけで同様の評価があってしかるべきである。予想されている評価を書いておくと,

Conjecture

$$
R_{(m),\alpha}(x,x) \approx \frac{1}{(1-|x|^2)^{N+\alpha}}
$$

である。

また, [3] と同様の議論をすることによって, $L^2(\mathbb{B},(1-|x|^2)^\alpha dx)$ から $b_\alpha^{(m),2}(\mathbb{B})$ への orthogonal projection を用いて Toeplitz 作用素を定義した場合の Toeplitz 作用素の特徴づけは可能であろうと予想する。

参考文献

[1] N. Aronszajn, T. M. Creese and L. J. Lipkin, Polyharmonic functions, Clarendon press, Oxford, 1983.

[2] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic function theory, Springer-Verlag, New York, 1992.

[3] B. R. Choe, Y. J. Lee and K. Na, *Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces*, Nagoya Math. J. **174** (2004), 165–186.

[4] R. Coifman and R. Rochberg, *Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p*, Astérisque **77** (1980), 1–66.

[5] M. Nicolescu, Les Fonctions Polyharmoniques, Hermann & Cie, Paris, 1936.

[6] M. Pavlović, *Decompositions of L^p and Hardy spaces of polyharmonic functions*, J. Math. Anal. Appl. **216** (1997), 499–509.

[7] L.V. Pessoa, *On the structure of polyharmonic Bergman type spaces over the unit disk*, Complex Variables and Elliptic Equations **60** (2015), 1668–1684.

[8] A. K. Ramazanov, *On the structure of spaces of polyanalytic functions*, Math. Notes **72** (2002), 692–704.

[9] K. Tanaka, *Biharmonic Bergman space and its reproducing kernel*, submitted.

[10] K. Tanaka, *On the structure of the polyharmonic Bergman spaces on the unit ball*, submitted.

[11] N. L. Vasilevski, Commutative algebras of Toeplitz operators on the Bergman space, Operator Theory: Advances and Applications, **185** (2008).

[12] K. Zhu, Operator theory in function spaces, Marcel Dekker. New York and Basel, 1990.