縮約Banach空間の型と余型

Types and cotypes of contracted Banach spaces

中井三留 *，　成田淳一郎 **

Mitsuru Nakai,　Junichiro Narita

Summary

We introduce a new class of topological linear spaces, what we call the class of contracted Banach spaces, which is a subclass of Fréchet spaces and, on the other hand, contains the class of Banach spaces. We extend the notion of types and cotypes to this new class which are important topological linear space theoretic invariants well recognized to have been powerful and useful tools for the study of Banach spaces. As an application of the above discussions we compute types and cotypes of Lebesgue spaces of exponents p not only in the interval $1 \leqq p \leqq \infty$ but also in the general case of p in $0 < p \leqq \infty$. The result is then used to obtain the general isomorphism theorem for Lebesgue spaces of general exponents p in $0 < p \leqq \infty$.

キーワードとフレーズ： バナッハ空間，縮約，余型，同型，ヒンチン不等式，ルベーグ空間，ラデマッヘル関数，位相線形空間，型．

Keywords and Phrases : Banach space, contracted, cotype, isomorphic, Khintchine inequality, Lebesgue space, Rademacher function, topological linear space, type.

献詞 ： 年来の畏友 Heppé O'Malla 教授の八十路の賀を祝して本論文を捧ぐ．

1. 序論. 話は**線形空間** (linear space) から始まる．線形空間の係数体は本論文を通して実数体 $\mathbb{R}$ とするが，本論文中のどの話題に於いても，係数体を仮に複素数体 $\mathbb{C}$ にとったとしても，実数体の場合の自明な修正で，いずれの係数体としても全く同様な主張が成立する．よって簡明を期して線形空間は実数体 $\mathbb{R}$ を係数体とする場合に限定するのである．さて二つの線形空間 X と Y をとり，作用素 $T : X \to Y$ を考える．もし $T : X \to Y$ が全単射であると，逆作用素 $T^{-1} : Y \to X$ が定義される．その上もし T が線形ならば T^{-1} も線形となる．そこで X と Y に対し全単射線形作用素 $T : X \to Y$ がとれるとき X と Y は**線形同型** (linearly isomorphic), 或いは線形が自明なら単に同型であると言う．このとき又 X と Y は同じ**線形構造**を持つとも言う．線形空間論で最も基本的な問題は与えられた二つの線形空間 X と Y が何時同型であるか又は同型でないかの決定である．この方向に資する重要な線形空間論的不変量が**次元**である．線形空間 X が有限 n 個の元からなる基底を持つとき X は**次元** $n \in \mathbb{N}$ (自然数全体) を持つといい，記号 $\dim X = n$ と記す．そうでないときは X は**無限次元**であると言い記号 $\dim X = \infty$ で表す．X と Y が同型なら $\dim X = \dim Y$ となることは自明で，この故に $\dim X$ は X の線形空間論的不変量であると言う具合に表現する．n 次元数ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ (但し，$n \in \mathbb{N}$, $x_j \in \mathbb{R}\ (j = i, \cdots, n)$) の全体を $\mathbb{R}^n$ と記すとき，$\mathbb{R}^n$ には自然に線形空間の構造が与えられるが，実は任意の抽象的な有限 n 次元線形空間 X をとるとき，必ず X は $\mathbb{R}^n$ に同型で，n 次元線形空間は本質的には唯一つの $\mathbb{R}^n$ のみであると言うことになる．ここ迄が大学初年級の標準的な数学教程の二本柱の一つである線形代数学の材料であり，十分に豊富な応用を持つ道具でもある．しかし本当に難しいのは $\dim X = \infty$ である X 達の線形代数学で，実は単純な二演算である**和** $(x, y) \to x + y : X \times X \to X$ と**スカラー倍** $(\alpha, x) \to \alpha x : \mathbb{R} \times X \to X$ のみでは，基本的な同型問題の段階のみであっても手も足も出ない．そこでなんとか無限次元を制御することを目指して，線形構造に加えて今一つの構造として，位相も合わせ考えることになる．こうして出てくるのが位相線形空間である．

線形空間 X に更に **Hausdorff 位相**が与えられて居り，これにより線形演算が連続であるとする，即ち，加法 $(x, y) \to x + y : X \times X \to X$ およびスカラー倍 $(\alpha, x) \to \alpha x : \mathbb{R} \times X \to X$ が共に連続であるとする．このとき X は**位相線形空間** (topological linear space) であると言う．二つの位相線形空間 X と Y をとり，作用素 $T : X \to Y$ を考える．X 内で $x \to x_0$ のとき Y 内で $Tx \to Tx_0$ となるなら T は $x_0 \in X$ で連続と言い，どの $x_0 \in X$ でも連続なら T は X 上連続であると言う．更に T が線形なら，T が X 上連続となる必要十分条件は T が零 $0 \in X$ で連続となることである．さて

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46B03; Secondary 46B09, 46B25, 46E30
* 名古屋工業大学・名誉教授
** 本学数学教室

$T: X \to Y$ が全単射とする．T が線形なら T^{-1} も自動的に線形となったが，T が X 上連続としても T^{-1} は必ずしも Y 上連続となる訳ではない．そこで $T: X \to Y$ のみならず $T^{-1}: Y \to X$ も又連続となるとき T は**両連続** (bicontinuous) と言う．又 T は同相であるとも言う．二つの位相線形空間 X と Y があり，全単射作用素 $T: X \to Y$ で線形かつ両連続なものがあるとき，X と Y は**位相線形同型**，或いは位相線形が了解されている状況なら単に**同型** (isomorphic) であると言い，記号 $X \approx Y$ で表す．このとき T を $X \approx Y$ を与える位相線形作用素と言う．又 $X \approx Y$ のとき X と Y は同じ**位相線形構造**を持つとも言う．線形空間論に於けると同様，位相線形空間論に於いても素朴ながら最も基本的な問題は二つの位相線形空間 X と Y を与えて何時 $X \approx Y$ 又は $X \not\approx Y$ であるかの決定である．$X \approx Y$ となる為の前提として，X と Y が線形同型でなければならない．従って依然として $\dim X$ が少なくとも一定の役割は果たすであろう．X が有限次元，$\dim X = n \in \mathbb{N}$, とするならば X は常に線形空間 $\mathbb{R}^n$ に線形同型であった．しかし X には更に位相構造があり，例え線形構造は唯一つとしても，X を位相線形空間にする様な位相構造は一杯あるかも知れぬ．そこで $\mathbb{R}^n$ に標準的な Hausdorff 位相を与える．$\mathbb{R}^n$ の 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ と $\boldsymbol{x}' = (x_1', \cdots, x_n')$ に対して，その間の距離 $\mathrm{dis}_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ を

$$\mathrm{dis}_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') := \left(\sum_{j=1}^{n} \left| x_j - x_j' \right|^2 \right)^{1/2} \tag{1.1}$$

で定めて $\mathbb{R}^n$ を距離空間とした Hausdorff 位相を $\mathbb{R}^n$ に与えると $\mathbb{R}^n$ は 位相線形空間となる．この 位相線形空間 $\mathbb{R}^n$ を n 次元 **Euclid 空間**と呼び，(1.1) を Euclid 距離と呼ぶ．

事実 A. ***X* を $\dim X = n \in \mathbb{N}$ である 位相線形空間とすると，*X* は $\mathbb{R}^n$ と 位相線形同型である：**

$$\boldsymbol{X \approx \mathbb{R}^n.} \tag{1.2}$$

即ち，有限次元 $n \in \mathbb{N}$ の 位相線形構造は唯一つである．換言すれば，有限次元位相線形空間 X と Y があるとき，$X \approx Y$ となる必要十分条件は $\dim X = \dim Y$ $(\in \mathbb{N})$ となることである．つまり有限次元線形空間を 位相線形空間にする様な Hausdorff 位相は唯一つあるのみであると言うことである．例えば，指数 $0 < p \leqq \infty$ をとり，線形空間 $\mathbb{R}^n$ の 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ と $\boldsymbol{x}' = (x_1', \cdots, x_n')$ の間の距離 $\mathrm{dis}_{\mathbb{R}^n_p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ を

$$\mathrm{dis}_{\mathbb{R}^n_p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left| x_j - x_j' \right|^p \right)^{1/p \vee 1} & (0 < p < \infty;\ p \vee 1 = \max\{p, 1\}), \\ \displaystyle\max_{1 \leqq j \leqq n} \left| x_j - x_j' \right| & (p = \infty) \end{cases} \tag{1.3}$$

で与えると 線形空間 $\mathbb{R}^n$ は 位相線形空間となる．これを $\mathbb{R}^n_p$ と記そう．特に Euclid 空間 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_2$ である．事実 A の言う所に依れば，$\mathbb{R}^n_p \approx \mathbb{R}^n_q$ $(0 < p, q \leqq \infty)$ となる．よって $\mathbb{R}^n_p$ と $\mathbb{R}^n_q$ は皆同一位相を持つが，勿論幾何 (図形の形) は随分と異なる．$\mathbb{R}^2_p$ の単位球 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2_p : \mathrm{dis}_{\mathbb{R}^2_p}(\boldsymbol{x}, 0) \leqq 1\}$ の形は下図 1 の如くである．

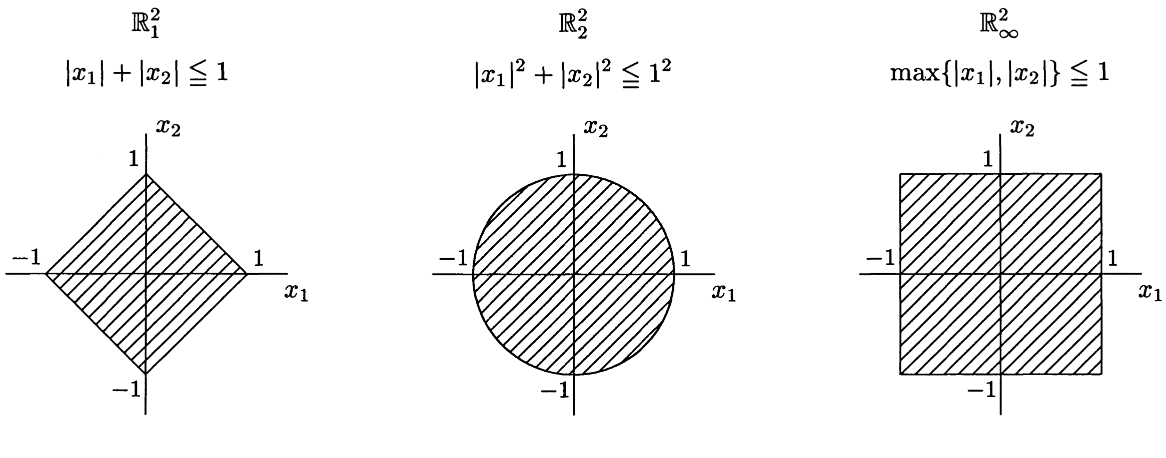

図 1 ($\mathbb{R}^2_p$ の単位球； $p = 1, 2, \infty$)

事実 A はどんな関数解析学の基本教程に於いても言及される所であるが ([1], [3], [18] 等参照)，大抵 X を 位相線形空

間の特別なものである所のノルム空間とする場合で述べられて，X を単に位相線形空間とする一般の場合を扱うものはあまり見かけない故，本質的な差はないけれど，一般の形での事実 A の証明を序でながらここに与えておく．

事実 A の証明： X の基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ を一組固定する．任意の $\boldsymbol{x}\in X$ に対して唯一つの点 $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ が決まって

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n \tag{1.4}$$

と表されるので，$T\boldsymbol{x}:=(x_1,\cdots,x_n)$ により全単射線形作用素 $T:X\to\mathbb{R}^n$ が定義出来る．

T の連続性を示す：X 内 $\boldsymbol{x}\to 0$ ならば $\mathbb{R}^n$ 内 $T\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\to 0$ となることを言う．次の 3 条件は互いに同値である：$\mathbb{R}^n$ 内 $(x_1,\cdots,x_n)\to 0$; $\mathbb{R}$ 内 $x_j\to 0$ $(j=1,\cdots,n)$; $\mathbb{R}$ 内

$$|(x_1,\cdots,x_n)|:=\left(|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2\right)^{1/2}\to 0.$$

依って X 内 $\boldsymbol{x}\to 0$ から $\mathbb{R}$ 内 $|T\boldsymbol{x}|\to 0$ が従うことを示したい．背理法の仮定として，X 内 $\boldsymbol{x}\to 0$ にも拘わらず $\mathbb{R}$ 内 $|T\boldsymbol{x}|\not\to 0$ とする．勿論 $[0,\infty]$ 内 $|T\boldsymbol{x}|\not\to 0$ でもある．$[0,\infty]$ のコムパクト性より X 内 $\boldsymbol{x}_\iota\to 0$ となる有向列 $(\boldsymbol{x}_\iota)_\iota$ で $(T\boldsymbol{x}_\iota)_\iota$ が $(0,\infty]$ 内での収束有向列となるものがとれる．従って $\lim_\iota 1/|T\boldsymbol{x}_\iota|\in[0,\infty)$ となる．以上の有向列 $(\boldsymbol{x}_\iota)_\iota\subset X$ に対して新有向列 $(\boldsymbol{y}_\iota)_\iota\subset X$ を $\boldsymbol{y}_\iota:=(1/|T\boldsymbol{x}_\iota|)\boldsymbol{x}_\iota$ で定める：

$$\boldsymbol{y}_\iota=y_{\iota 1}\boldsymbol{e}_1+\cdots+y_{\iota n}\boldsymbol{e}_n,\quad y_{\iota j}:=\frac{1}{|T\boldsymbol{x}_\iota|}x_{\iota j}\ (j=1,\cdots,n). \tag{1.5}$$

各 $j=1,\cdots,n$ につき，$|y_{\iota j}|=|x_{\iota j}|/\left(|x_{\iota 1}|^2+\cdots+|x_{\iota n}|^2\right)^{1/2}\leqq 1$ だから，$[-1,1]$ のコムパクト性により，$(\boldsymbol{x}_\iota)_\iota$ の等終有向部分列を逐次 n 回適当に選ぶことにより，初めから $(\boldsymbol{x}_\iota)_\iota$ に対してどの $j=1,\cdots,n$ についても各 $(y_{\iota j})_\iota\subset[-1,1]$ がある $y_j\in[-1,1]$ へ収束して居る様になっているものと仮定してよい：

$$\lim_\iota y_{\iota j}=y_j\ (j=1,\cdots,n).$$

これと

$$y_{\iota 1}^2+\cdots+y_{\iota n}^2=\frac{x_{\iota 1}^2}{|T\boldsymbol{x}_\iota|^2}+\cdots+\frac{x_{\iota n}^2}{|T\boldsymbol{x}_\iota|^2}=\frac{|T\boldsymbol{x}_\iota|^2}{|T\boldsymbol{x}_\iota|^2}=1$$

を合わせて

$$y_1^2+\cdots+y_n^2=1 \tag{1.6}$$

となる．他方 $\boldsymbol{y}_\iota=(1/|T\boldsymbol{x}_\iota|)\,\boldsymbol{x}_\iota$ に於いて，$(0,\infty)$ 内 $\lim_\iota 1/|T\boldsymbol{x}_\iota|\in[0,\infty)$ かつ X 内 $\boldsymbol{x}_\iota\to 0$ であるので，X 内での線形演算の連続性により X 内で

$$\boldsymbol{y}_\iota=(1/|T\boldsymbol{x}_\iota|)\,\boldsymbol{x}_\iota\to\left(\lim_\iota 1/|T\boldsymbol{x}_\iota|\right)\cdot 0=0,$$

即ち X 内 $\boldsymbol{y}_\iota\to 0$ となる．従って等式

$$y_{\iota 1}\boldsymbol{e}_1+\cdots+y_{\iota n}\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{y}_\iota$$

に於いて，$\mathbb{R}$ 内 $y_{\iota j}\to y_j$ $(j=1,\cdots,n)$ だから，再び X 内での線形演算の連続性により，X 内で上等式の辺々の極限をとることにより

$$y_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+y_n\boldsymbol{e}_n=0$$

となる．$\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ の 1 次独立性により，$y_1=\cdots=y_n=0$ でなければならず，勿論

$$y_1^2+\cdots+y_n^2=0 \tag{1.7}$$

となる．二つの結論 (1.6) と (1.7) の両立は明らかに矛盾なので $T:X\to\mathbb{R}^n$ の連続性が示された．最後に $T^{-1}:\mathbb{R}^n\to X$ は (1.4) により

$$T^{-1}(x_1,\cdots,x_n)=x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{x}$$

で与えられるが，$\mathbb{R}^n$ 内 $(x_1,\cdots,x_n)\to 0$, 即ち，$\mathbb{R}$ 内各 $x_j\to 0$ $(j=1,\cdots,n)$, より，再度 X に於ける線形演算の連続性により，X 内 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n\to 0$ となり，T^{-1} の連続性はこの様に殆ど自明故，$T:X\to\mathbb{R}^n$ は全単射線形両連続作用素となることが示され，$X\approx\mathbb{R}^n$ が保証された. □

線形空間同様，位相線形空間 X も有限次元なら同型の意味で各次元 $n\in\mathbb{N}$ 毎に唯一つの n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ しかないのだから，$\dim X<\infty$ の場合は最早興味はない．依って $\dim X=\infty$ となる位相線形空間が考察の主対象となる．線形構造を一つ X 上に固定しても，$\dim X=\infty$ の場合，X を位相線形空間ならしめる X 上の Hausdorff 位相は一般に無数にありうるので，位相の範疇を限定して研究するのが常法である．X を線形空間 (無限次元が興味の主対象なれど一応は次元に制限をつけぬ) とするとき，写像 $x\mapsto\|x\|:X\to\mathbb{R}$ を考え，これが次の 3 条件をみたすとする：

正定値性： 常に $\|x\|\geqq 0$ であり，更に $\|x\|=0$ と $x=0$ は同値である；

斉次性： 任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ と $x\in X$ に対し $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ となる；

三角不等式： すべての X の元 x と y に対し $\|x+y\|\leqq\|x\|+\|y\|$ となる．

このとき $\|x\|$ を x の**ノルム**と呼ぶ．2 点 $x,y\in X$ に対しその間の距離を $\|x-y\|$ で与えると X は距離空間となるが，更にこの完備性をも仮定して，これの定める Hausdorff 位相を X に与えて X は位相線形空間となる．この様に完備なノルム $\|\cdot\|$ を兼ね備えた線形空間を **Banach 空間**と呼ぶ (もし完備性を仮定しない場合はノルム空間と呼ぶ)．Banach 空間 X の位相線形構造の解析に資するを期して，X 上に 2 種の尺度を用意する．指数 $1\leqq p\leqq\infty$ をとるとき，X の有限個の元 $x_1,\cdots,x_n$ に対して

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{1/p}\quad(1\leqq p<\infty)\tag{1.8}$$

を $x_1,\cdots,x_n$ の **p 位の絶対和**と言う．これは p の減少関数なので，この $p\to\infty$ の極限で ∞ 位の絶対和 $\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^\infty\right)^{1/\infty}$ も考える．次に

$$\left(\frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n}\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j\right\|^p\right)^{1/p}\quad(1\leqq p<\infty)\tag{1.9}$$

を $x_1,\cdots,x_n$ の **p 位の random 平均**と言う．これは p の増加関数なので，この $p\to\infty$ の極限で ∞ 位の random 平均 $\left(2^{-n}\sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n}\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j\right\|^\infty\right)^{1/\infty}$ も考える．さて Banach 空間 X を与えたとき，或指数 $1\leqq p\leqq 2$ とある定数 $C>0$ があって，不等式

$$\left(\frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n}\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j\right\|^p\right)^{1/p}\leqq C\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{1/p}\tag{1.10}$$

がすべての $n\in\mathbb{N}$ とすべての X の元 $x_1,\cdots,x_n$ に対して成り立つなら，p は X の一つの**型 (type)** であると言いその全体を $\mathrm{T}(X)$ と記して X の型集合と呼ぶ．同様にして，或指数 $2\leqq p\leqq\infty$ と或定数 $C>0$ があって不等式

$$\left(\frac{1}{2^n}\sum_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n}\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j\right\|^p\right)^{1/p}\geqq C\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{1/p}\tag{1.11}$$

がすべての $n\in\mathbb{N}$ とすべての X の元 $x_1,\cdots,x_n$ に対して成り立つなら，p は X の一つの**余型 (cotype)** であると言いその全体を $\Gamma(X)$ と記して X の余型集合と呼ぶ．型と余型は Banach 空間論での不変量で重要な役割を果たしている．つまり二つの Banach 空間 X と Y があって，$X\approx Y$ なら $\mathrm{T}(X)=\mathrm{T}(Y)$ かつ $\Gamma(X)=\Gamma(Y)$ となる．故に，例えば，X と Y 夫々の型と余型を計算して，もし $\mathrm{T}(X)\neq\mathrm{T}(Y)$ 又は $\Gamma(X)\neq\Gamma(Y)$ であるならば，$X\not\approx Y$ であることになる．この様にして同型問題にも資する所大である．

こゝからが我々の提案である．線形空間 X に写像 $x\mapsto\|x\|:X\to\mathbb{R}$ が与えられて居り，ノルムの三条件の内，正定値性と斉次性は満たされるが，三角不等式は満たされるとは限らないが，その代わり，とにかく，次の条件は満たされるとする：

縮約三角不等式：或定数 $s>0$ があって，X のすべての元 x,y に対して次の不等式が成り立つ：

$$\|x+y\|^s \leqq \|x\|^s + \|y\|^s.$$

このとき s を $\|\cdot\|$, 又 $\|\cdot\|$ を X の附帯物とみて，X の縮約示数 (contraction index) と呼ぶ．X の縮約示数の全体は区間 $(0,\sigma_X]$ を形成し，$0<\sigma_X\leqq 1$ であることが示される．そこで σ_X を X の**最大縮約示数** (maximal (optimal) contraction index) と呼ぶ．以上の三条件，即ち，正定値性，斉次性，縮約三角不等式の三条件が満たされるとき $\|\cdot\|$ を X の**縮約ノルム** (contracted norm) と呼ぶことにしよう．すると X の 2 点 x と y の距離を $\|x-y\|^{\sigma_X}$ で与えたとき X は距離空間となるが，更にこれが完備であると言う条件を要請するとき $X=(X,\|\cdot\|)$ を**縮約 Banach 空間** (contracted Banach space) と言う．従って X が Banach 空間なら，それは $\sigma_X=1$ となる縮約 Banach 空間であり，逆に X が $\sigma_X=1$ となる縮約 Banach 空間とすると X は純正の Banach 空間である．勿論，縮約 Banach 空間 $(X,\|\cdot\|)$ に対し $(X,\|\cdot\|^{\sigma_X})$ は $\|\cdot\|^{\sigma_X}$ を Fréchet ノルムとする Fréchet 空間で，$(X,\|\cdot\|^{\sigma_X})\approx(X,\|\cdot\|)$ だから範疇としての包含関係として

$$\{\,\text{Banach 空間}\,\}\subset\{\,\text{縮約 Banach 空間}\,\}\subset\{\,\text{Fréchet 空間}\,\}\subset\{\,\text{位相線形空間}\,\}$$

となって居る．Banach 空間上の型・余型理論をその本質的な性質を保って Fréchet 空間迄拡張することは Fréchet ノルムが一般過ぎて無理である．そこで型・余型理論を Banach 空間上のそれの内容をすべて含む形で拡張出来る { Banach 空間 } を含む様な { Fréchet 空間 } の出来るだけ大きな部分範疇は何であろうかとの考察の結果として，{ 縮約 Banach 空間 } と呼ぶ所の新概念へ収斂したと言うのが我々の本課題の結論である．この新概念とそれに纏わる所をまとめて報告することが本論文の目的である．さて X が縮約 Banach 空間であるとしても，p 位の絶対和 (1.8) 及び (1.9) を X の縮約ノルム $\|\cdot\|$ を使って同様に定義する．しかも指数 p は $1\leqq p\leqq\infty$ より広く $0<p\leqq\infty$ で考えるべき必然性が本質的に存した．その上で $0<p\leqq 2$ である p が (1.10) を満たすとき p を X の型と言いその全体を $\mathrm{T}(X)$ と記して X の型集合と呼び，又 $2\leqq p\leqq\infty$ である p が (1.11) を満たすことで p が X の余型である事と定義し，その全体 $\Gamma(X)$ を X の余型集合と名付ける．すると縮約 Banach 空間 X と Y に対し $X\approx Y$ ならば $\mathrm{T}(X)=\mathrm{T}(Y)$ かつ $\Gamma(X)=\Gamma(Y)$ となり，型や余型は縮約 Banach 空間論的不変量となり，やはり縮約 Banach 空間の同型問題に有力な道具を提供する．(Ω,Σ,μ) を σ 有限かつ非自明な測度空間とする．指数 $0<p\leqq\infty$ に対し Ω 上の可測関数 f で $|f|^p$ が Ω 上可積分，又は Ω 上本質的有界となる様な f の全体を $L_p(\mu)$, 又は $L_\infty(\mu)$ と記し，位数 p の **Lebesgue 空間**と呼ぶ．本来のノルムではなくとも

$$\|f\|_{L_p(\mu)} := \left(\int_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \quad (0<p<\infty),$$

又は $\|f\|_{L_\infty(\mu)}=\operatorname{ess\,sup}_\Omega |f|$, を ***p* ノルム**と呼ぶ．位数 p の Lebesgue 空間 $\left(L_p(\mu),\|\cdot\|_{L_p(\mu)}\right)$ は縮約 Banach 空間でその最大縮約示数 $\sigma_{L_p(\mu)}=p\wedge 1:=\min\{p,1\}$ である．$1\leqq p\leqq\infty$ なら $L_p(\mu)$ は $p\wedge 1=1$ を最大縮約示数とする縮約 Banach 空間故 $L_p(\mu)$ $(1\leqq p\leqq\infty)$ は純正の Banach 空間である．$0<p<1$ なら $L_p(\mu)$ は最大縮約示数 $\sigma_{L_p(\mu)}=p\wedge 1=p$ の縮約 Banach 空間で，$L_p(\mu)$ $(0<p<1)$ は絶対に Banach 空間になることはないそれこそ純正の縮約 Banach 空間である．本論文の主要な目的の一つは Lebesgue 空間 $L_p(\mu)$ $(0<p\leqq\infty)$ の型と余型を計算することにある．即ち次の主張に証明を与える．

定理 B. 無限次元 Lebesgue 空間 $L_p(\mu)$ の型集合 $\mathrm{T}(L_p(\mu))$ と余型集合 $\Gamma(L_p(\mu))$ は次の如くである：指数 $0<p<\infty$ に対しては

$$\begin{cases} \mathrm{T}(L_p(\mu)) = (0, p\wedge 2], \\ \Gamma(L_p(\mu)) = [p\vee 2, \infty], \end{cases} \tag{1.12}$$

但し，$p\wedge 2=\min\{p,2\}$, $p\vee 2=\max\{p,2\}$ である；指数 $p=\infty$ に対しては

$$\begin{cases} \mathrm{T}(L_\infty(\mu)) = (0, 1], \\ \Gamma(L_\infty(\mu)) = [\infty, \infty]. \end{cases} \tag{1.13}$$

一般に有限次元縮約 Banach 空間 X に対しては $\mathrm{T}(X)=(0,2]$, $\Gamma(X)=[2,\infty]$ となる．故に有限次元 Lebesgue 空間 $L_p(\mu)$ に対しては

$$\begin{cases} \mathrm{T}(L_p(\mu)) = (0, 2], \\ \Gamma(L_p(\mu)) = [2, \infty] \end{cases} \qquad (0<p\leqq\infty;\ \dim L_p(\mu)<\infty) \tag{1.14}$$

となる訳で，(1.12), (1.13), (1.14) の三者合わせて Lebesgue 空間に関する型・余型は完全に解明される．単位区間 $I := [0,1]$ 上の Lebesgue 測度 $\mathbb{P}$ による測度空間上の Lebesgue 空間 $L_p(\mathbb{P})$ を単に L_p と記すのが標準的記法である $(0 < p \leqq \infty)$. Lebesgue 空間は L_p で，更に指数は $1 \leqq p < \infty$ の場合に限定して，(1.12) の T に関するところは 1962 年 Nordlander[14] が，Γ に関する部分は 1933 年 Orlicz[15], [16] が，本質的には証明した．無論型・余型概念が出てくるのは 1974 年の J.Hoffman-Jϕrgensen の論文 [6] を嚆矢としその基本的性質の研究は 1976 年の B.Maurey と G.Pisier の論文 [12] に始まる (B. Maurey の報文 [11] や F.Albiac と N. T. Kalton の教科書 [1] 等参照) ので，Nordlander や勿論 Orlicz の時代にはこれら型・余型の概念は未だ誕生して居らず従って定理 B の表象にある名前ではなく本質を別の形で彼等が見つけて居たということである．L_p を一般の $L_p(\mu)$ にして更に $0 < p < 1$ にしても (1.12) はそのまゝ有効である様にしたのは，我々の型・余型概念の縮約 Banach 空間への拡張の成果である．(1.13) は本学紀要の我々の前著 [13] 以外にあるか否かの特定は未だ出来ていないが，本論文では [13] と異なる (多分より簡単な) 別証明を与える．この定理 B の直接の応用として次の結果を述べる．

定理 C. 一般指数 $0 < p,\ q \leqq \infty$ の二つの無限次元 Lebesgue 空間 $L_p(\mu)$ と $L_q(\mu)$ に対して $L_p(\mu)$ と $L_q(\mu)$ が同型，$L_p(\mu) \approx L_q(\mu)$，となる為の必要十分条件は $p = q$ となることである．

これは 1933 年 Orlicz[16] が L_p の場合，更に $1 \leqq p,\ q < \infty$ の場合に与えた古い結果である．一般に $L_p(\mu)$ でしかも一般指数 $0 < p,\ q \leqq \infty$ の場合を述べた所は，我々の本学紀要の前著 [13] 以外で未だ見つけていない．これに対しても又，定理 B の直接の適用だけで終わる，[13] での悪戦苦闘の末捻り出した証明より遙かに簡潔な，証明を与える．

本論文は 7 個の節からなる．こゝ迄述べて来たこの「第 1 節序論」についで「第 2 節 Rademacher 関数」に於いて random 級数で必要となる符号空間の解析の為の Rademacher 関数とその確率論的独立性との関連での積公式を導く．その結果は続く「第 3 節 Khintchine の不等式」に於いて標題の不等式の証明に使われる．この不等式の意味の理解の深化の一助の為，級数 $\sum a_n$ から生成される random 級数 $\sum \pm a_n$ の殆どが収束する為の必要十分条件は $\sum a_n^2 < \infty$ であると言う Rademacher と Khintchine-Kolmogoroff の定理の証明を与える．主題の本論は「第 4 節 位相線形空間」から始まる．ここで新概念である縮約 Banach 空間の定義や具体性質を論じ，更にその重要な実例としての Lebesgue 空間が述べられる．その上で「第 5 節 縮約 Banach 空間の型と余型」で，Banach 空間の場合をモデルとする拡張された型・余型の性質が論じられる．「第 6 節 Lebesgue 空間の構造不等式」で Khintchine, Orlicz, Nordlander の名を冠した各不等式に基づく所謂構造不等式を位数 $0 < p < \infty$ の Lebesgue 空間上で確立する．これを使って最後の「第 7 節 Lebesgue 空間の型と余型」に於いて，定理 B や定理 C の証明が与えられる．

前著 [13] に於けると同様本論文の完成に当たっても両著者とも北海道大学名誉教授林実樹廣氏から多大の様々な示唆の恩恵に与った．特に文献 [1] の存在の指摘は衝撃的で新概念縮約 Banach 空間の着想に到る刺激的な動機づけを得た．

2. Rademacher 関数. 既に序論で登場した様に実数体及び複素数体を夫々 $\mathbb{R}$ 及び $\mathbb{C}$，自然数全体を $\mathbb{N}$ と記す．$\mathbb{R}$ は又直線 $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{C}$ は複素平面を表すのにも使う．直線 $\mathbb{R}^1$ 上の単位区間は $I = [0,1]$ で表す．I の Lebesgue 可測部分集合の σ algebra $\mathcal{L}$, I 上の Lebesgue 測度 $\mathbb{P}$ (即ち $t \in I$ に対し $d\mathbb{P}(t) = dt$) よりなる測度空間 $(I, \mathcal{L}, \mathbb{P})$ は，各 $B \in \mathcal{L}$ を事象としその確率を $\mathbb{P}(B)$ とする確率空間となる．f を I 上の確率変数，即ち可測関数とするとき，もしその積分が確定ならば，f の**期待値** (平均値) $\mathbb{E}f$ は

$$\mathbb{E}f := \int_I f\, d\mathbb{P} = \int_0^1 f(t)\, dt \tag{2.1}$$

で与えられる．計算の便宜上各 $B \in \mathcal{L}$ に対して記号

$$\mathbb{E}_B f := \int_B f\, d\mathbb{P} = \int_{t \in B} f(t)\, dt$$

も使う．従って $\mathbb{E}_I f = \mathbb{E}f$ である．指数 $0 < p \leqq \infty$ に対し，$0 < p < \infty$ なら，$|f|^p$ が可積である様な，又 $p = \infty$ なら $|f|$ が本質的有界である様な I 上の確率変数の全体を L_p と記す．L_p $(0 < p < \infty)$ の 2 点 f と g の間の距離を

$$(\mathbb{E}\,|f - g|^p)^{1/p \vee 1} \quad (p \vee 1 = \max\{p, 1\})$$

で与えると，又 L_∞ の 2 点 f と g の間の距離を

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in I} |f(t) - g(t)|$$

で与えると，L_p は線形完備距離空間となる．この様にして位相線形空間を考える L_p を標準的 **Lebesgue 空間**と呼ぶ．

2元集合 $\{+1,-1\}$ を符号集合，$+1$ を正号，-1 を負号と言う．$+1$ であるか -1 である符号 s_j の可算無限列 $s=(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$，即ち

$$s=(s_1,s_2,\cdots,s_j,\cdots)$$

を符号列と呼んでその全体を $\mathscr{S}$ と書く．有限個の s_j を除くと，残りはすべて $+1$ であるか -1 である様な符号列 s は最終的定数 (eventually constant) であると言い，最終的定数符号列 s の全体を $\mathscr{S}_0$ とかき，そうでない符号列 s=$(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$，即ち $+1$ も -1 も共に無限回現れる様な s，を最終的定数でないと言い，その全体 $\mathscr{S}\backslash\mathscr{S}_0$ を $\mathscr{S}_1$ とかく：$\mathscr{S}=\mathscr{S}_0+\mathscr{S}_1$，$\mathscr{S}_0\cap\mathscr{S}_1=\emptyset$，正号 $+1$ に数字 0，負号 -1 に数字 1 の役割を当て，各 $s\in\mathscr{S}$ を I の数の2進小数展開と見立てると，$\mathscr{S}_1$ は I の2進無理数の全体 $I\backslash E$ と $1:1$ に対応し，$\mathscr{S}_0$ は I の2進有理数の全体 E と $2:1$ に対応する (例えば，

$$0.10\cdots0\cdots=0.011\cdots1\cdots=:\xi\in E$$

に注意すれば符号列 $s=(-1,+1,\cdots,+1,\cdots)\in\mathscr{S}_0$ と $s'=(+1,-1,-1,\cdots,-1,\cdots)\in\mathscr{S}_0$ は勿論 $s\neq s'$ であるがどちらも $\xi\in E$ に対応する)．故に $\mathscr{S}_i$ の濃度 $\#\mathscr{S}_i$ $(i=0,1)$ は

$$\begin{cases}\#\mathscr{S}_0=\aleph_0 & (\text{可算無限濃度}),\\ \#\mathscr{S}_1=\aleph & (\text{連続体濃度})\end{cases}$$

であるので，$\mathscr{S}$ は量的には $\#\mathscr{S}=\aleph$ でその主体部分は $\#\mathscr{S}_1=\aleph$ である $\mathscr{S}_1$ で，$\mathscr{S}_0$ は $\#\mathscr{S}_0=\aleph_0$ である取るに足らない部分である．

以上の情況を数式的に表現する目的として，前世紀冒頭から間もない 1922 年に Rademacher [17] ([4] の解説も参照) は I 上の関数

$$\rho_n(t):=\operatorname{sgn}(\sin(2^n\pi t)),\quad 0\leqq t\leqq 1,\quad n\in\mathbb{N} \tag{2.2}$$

を導入した．ここに sgn は符号関数，即ち，$\xi\neq0$ に対しては $\operatorname{sgn}\xi=\xi/|\xi|$, $\operatorname{sgn}0=0$ である．よって $\rho_n(t)$ は3値関数 $\rho_n(t)=-1$, 0, 又は 1 である階段関数である．導入者に因んで $\rho_n(t)$ を現今 **Rademacher 関数**と呼ぶ．Rademacher 関数は各 n 毎に1つづつ $\rho_n(t)$ があるので，$\rho_n(t)$ を $\boldsymbol{n}$**位** の Rademacher 関数と言う．

n 位 Rademacher 関数 ρ_n をより良く理解する為に，I の分割を考える．$n\in\mathbb{N}$ に対して，先ず $E_n:=\{k/2^n:k=0,1,\cdots,2^n\}$ とおく．これは I の 2^n 等分点である．すると $I\backslash E_n$ は 2^n 個の開区間

$$J_{n,j}:=\left\{t\in I:\frac{j-1}{2^n}<t<\frac{j}{2^n}\right\}\quad(j=1,\cdots,2^n)$$

に分割され，それらの長さ $|J_{n,j}|$ は j に依らず $|J_{n,j}|=1/2^n$ である．$J_{n,j}$ $(j=1,\cdots,2^n)$ を $\boldsymbol{n}$**位** の開区間と言う．すると (2.2) の言い換えとして，

$$\begin{cases}\rho_n|J_{n,j}=(-1)^{j-1} & (j=1,\cdots,2^n)\\ \rho_n|E_n=0\end{cases} \tag{2.3}$$

となる．言う迄もなく，既出の2進有理数の全体 E は，

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\left\{\frac{k}{2^n}:k=0,1,\cdots,2^n;n\in\mathbb{N}\right\},$$

即ち，I の 2^n 等分点の $n\in\mathbb{N}$ すべてに渉るもの全体である．さて各数 $t\in I\backslash E$ は唯一通りの2進展開

$$t=0.b_1b_2b_3\cdots,\quad b_n=0\text{ 又は }1 \tag{2.4}$$

を持つ．列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は最終的定数ではない，即ち 0 も 1 も無限回現れる．$b_n=0$ であるか 1 であるかは，$t\in J_{n,j}$ とするとき，j が奇数であるか偶数であるかによって決まる．よって上の (2.3) より

$$\rho_n(t)=\begin{cases}+1 & (b_n=0\text{ のとき})\\ -1 & (b_n=1\text{ のとき})\end{cases}$$

となる．従って

$$\rho(t) := (\rho_1(t), \rho_2(t), \rho_3(t), \cdots) \in \mathscr{S}_1 \tag{2.5}$$

である．(2.4) と (2.5) で定まる写像 $t \to \rho(t) : I\backslash E \to \mathscr{S}_1$ は全単射である．単射なことは自明であり，又任意の $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S}_1$ に対して，

$$b_n := \frac{1}{2}(1 - s_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

と定め，(2.4) により $t \in I\backslash E$ を決めたら $\rho(t) = s$ となるから全射であることも同様に明白であった．この様にして $\mathscr{S}_1$ と $I\backslash E$ を同一視して，$(I, \mathcal{L}, \mathbb{P})$ と実質的に同じである測度空間 $(I\backslash E, \mathcal{L}, \mathbb{P})$ を $\mathscr{S}_1$ に移行して $\mathscr{S}_1$ 上の測度空間を考える．$\mathscr{S}_0$ は可算故その測度は零と定めてよく，こうして $\mathscr{S}$ 上の測度空間が構成出来る．Rademacher は $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty$ である級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ より生ずる符号付き級数，所謂 random 級数 $\sum_{s\in\mathbb{N}} \pm a_n$ の殆どすべてのものは収束することを示した ([17]) のであるが，その意味を明確化する目的で Rademacher 関数が導入された．この論文の本筋からは外れる話題ながら，Rademacher 関数のより深い意味を知る上で重要なので，それに纏わる所を後程次の第 3 節の後半に附記する．

有限値関数 g_n の定義域は $\{-1, 0, 1\}$ を含むものとする．この様な関数列 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$f_n := g_n \circ \rho_n \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.6}$$

で与える．これは I 上の確率変数列である．$(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{N}$ の任意の増加列とする：

$$1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots . \tag{2.7}$$

このとき次の期待値の**積公式**を示す：任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathbb{E}\left(\prod_{\nu=1}^{n} f_{k_\nu}\right) = \prod_{\nu=1}^{n} \mathbb{E}\left(f_{k_\nu}\right) \tag{2.8}$$

が成立する．証明の便宜上 $F_0 := 1$ かつ

$$F_m := \prod_{\nu=1}^{m} f_{k_\nu} \quad (m \in \mathbb{N})$$

と置くならば，$F_m = F_{m-1} f_{k_m}$ であるが，先ず任意の $m \in \mathbb{N}, 1 \leqq m \leqq n,$ に対し

$$\mathbb{E}(F_m) = \mathbb{E}(F_{m-1})\mathbb{E}(f_{k_m}) \quad (m \in \mathbb{N}) \tag{2.9}$$

となることを示す．(2.9) の両辺を $m = 1$ から n に渉って辺々に掛け合わせれば (2.8) が得られるからである (図 2 参照).

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(\cancel{F_0}) &=& 1 \\
\mathbb{E}(\cancel{F_1}) &=& \mathbb{E}(\cancel{F_0})\, \mathbb{E}(f_{k_1}) \\
\mathbb{E}(\cancel{F_2}) &=& \mathbb{E}(\cancel{F_1})\, \mathbb{E}(f_{k_2}) \\
\mathbb{E}(\cancel{F_3}) &=& \mathbb{E}(\cancel{F_2})\, \mathbb{E}(f_{k_3}) \\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
\mathbb{E}(\cancel{F_{n-1}}) &=& \mathbb{E}(\cancel{F_{n-2}})\, \mathbb{E}(f_{k_{n-1}}) \\
\mathbb{E}(F_n) &=& \mathbb{E}(\cancel{F_{n-1}})\, \mathbb{E}(f_{k_n}) \qquad \times \\
\hline
\mathbb{E}(F_n) &=& \prod_{\nu=1}^{n} \mathbb{E}(f_{k_\nu})
\end{array}$$

図 2

(2.9) を示すに当たって，最初

$$\mathbb{E}(f_{k_m}) = \frac{1}{2}\big(g_{k_m}(1) + g_{k_m}(-1)\big) \tag{2.10}$$

を導く．$I\backslash E_{k_m} = \cup_{j=1}^{2^{k_m}} J_{k_m,j}$ で E_{k_m} の長さ $|E_{k_m}| = 0$ だから

$$\mathbb{E}(f_{k_m}) = \mathbb{E}_I(f_{k_m}) = \sum_{j=1}^{2^{k_m}} \mathbb{E}_{J_{k_m,j}}(f_{k_m})$$

である．$f_{k_m} = g_{k_m} \circ \rho_{k_m}$ の $J_{k_m,j} = \left((j-1)/2^{k_m}, j/2^{k_m}\right)$ 上の値は (2.3) で見た通り $\rho_{k_m}|J_{k_m,j} = (-1)^{j-1}$ だから，$f_{k_m}|J_{k_m,j} = g_{k_m}\left((-1)^{j-1}\right)$ $(j = 1, \cdots, 2^{k_m})$ である．つまり

$$\begin{cases} f_{k_m}|J_{k_m,2j-1} = g_{k_m}(1) \\ f_{k_m}|J_{k_m,2j} = g_{k_m}(-1) \end{cases} \qquad (j = 1, \cdots, 2^{k_m-1})$$

である．だから

$$\mathbb{E}(f_{k_m}) = \sum_{j=1}^{2^{k_m-1}} \left(\mathbb{E}_{J_{k_m,2j-1}}(f_{k_m}) + \mathbb{E}_{J_{k_m,2j}}(f_{k_m})\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{2^{k_m-1}} \Big(g_{k_m}(1)\,|J_{k_m,2j-1}| + g_{k_m}(-1)\,|J_{k_m,2j}|\Big) = \sum_{j=1}^{2^{k_m-1}} \left(g_{k_m}(1)2^{-k_m} + g_{k_m}(-1)2^{-k_m}\right)$$
$$= 2^{k_m-1} \cdot 2^{-k_m} \left(g_{k_m}(1) + g_{k_m}(-1)\right) = \frac{1}{2}\left(g_{k_m}(1) + g_{k_m}(-1)\right)$$

となり (2.10) が出る．

次に $\mathbb{E}(F_{m-1})$ を計算する．それに先立って k_{m-1} 位区間への分解 $I\backslash E_{k_{m-1}} = \cup_{i=1}^{2^{k_{m-1}}} J_{k_{m-1},i}$ とその次の段階 k_m 位区間への分解 $I\backslash E_{k_m} = \cup_{j=1}^{2^{k_m}} J_{k_m,j}$ の関係を眺める．$\left|J_{k_{m-1},i}\right| = 2^{-k_{m-1}}$, $\left|J_{k_m,j}\right| = 2^{-k_m}$ であるから，

$$2^{-k_{m-1}} \div 2^{-k_m} = 2^{k_m - k_{m-1}} =: 2N_m$$

とおくならば，各 $J_{k_{m-1},i}$ は $2N_m$ 個の $J_{k_m,j}$ に分割される．さて $1 \leqq i \leqq 2^{k_{m-1}}$ である i を一つ固定したとき，$J_{k_{m-1},i}$ 内で最初に現れる k_m 位区間は $J_{k_m,2N_m(i-1)+1}$ であり，次々と第 2 添字が 1 つづつ合計 $2N_m$ 個ふえて，最後の区間は $2N_m(i-1) + 2N_m = 2N_m i$ より $J_{k_m,2N_m i}$ である：

$$J_{k_{m-1},i} = \bigcup_{j=2N_m(i-1)+1}^{2N_m i} J_{k_m,j}. \tag{2.11}$$

そこで第 k_{m-1} 位の指定区間 $J_{k_{m-1},i} =: J_{k_{m-1},i_{m-1}}$ (即ち，$i = i_{m-1}$ とおく) に対しその先祖である第 k_{m-2} 位区間 $J_{k_{m-2},i_{m-2}}$ が唯一つ定まる．(即ち，$J_{k_{m-1},i_{m-1}} \subset J_{k_{m-2},i_{m-2}}$ の意)．又その先祖である第 k_{m-3} 位区間 $J_{k_{m-3},i_{m-3}}$ が唯一つ定まる．この様にして系譜

$$J_{k_{m-1},i} \equiv J_{k_{m-1},i_{m-1}} \subset J_{k_{m-2},i_{m-2}} \subset J_{k_{m-3},i_{m-3}} \subset \cdots \subset J_{k_2,i_2} \subset J_{k_1,i_1}$$

が唯一通り定まる．即ち $i = i_{m-1}$ により $\mathbb{N}$ の元の列 $\{i_\nu\}_{\nu=1}^{m-1}$ が $i = i_{m-1}$ のみに依存して唯一つ定まる訳である．各 ρ_{k_ν} $(\nu = 1, \cdots, m-1)$ については

$$\rho_{k_\nu}|J_{k_\nu,i_\nu} = (-1)^{i_\nu - 1} \quad (\nu = 1, \cdots, m-1)$$

であるので

$$c_i := \prod_{\nu=1}^{m-1} g_{k_\nu}\left((-1)^{i_\nu - 1}\right)$$

と置くならば，$F_{m-1} = \displaystyle\prod_{\nu=1}^{m-1} g_{k_\nu} \circ \rho_{k_\nu}$ について

$$F_{m-1}|J_{k_{m-1},i} = c_i \quad (1 \leqq i \leqq 2^{k_{m-1}})$$

であり勿論

$$F_{m-1}|J_{k_m,j} = c_i \quad (2N_m(i-1) \leqq j \leqq 2N_m i; 1 \leqq i \leqq 2^{k_{m-1}})$$

である．よって各 i につき

$$\mathbb{E}_{J_{k_m,j}}(F_{m-1}) = c_i\,|J_{k_m,j}| = 2^{-k_m}c_i \quad (2N_m(i-1)+1 \leqq j \leqq 2N_m i) \tag{2.12}$$

であるから $\mathbb{E}_{J_{k_{m-1},i}}(F_{m-1})$ は $2N_m$ 個の $\mathbb{E}_{J_{k_m,j}}(F_{m-1}) = 2^{-k_m}c_i$ の和となり

$$\mathbb{E}_{J_{k_m,j}}(F_{m-1}) = \frac{1}{2N_m}\mathbb{E}_{J_{k_{m-1},i}}(F_{m-1}) \quad (j = 2N_m(i-1)+1, \cdots, 2N_m i) \tag{2.13}$$

が導かれた．

さて最終段階に入る．$\mathbb{E}(F_m) = \sum_{i=1}^{2^{k_{m-1}}} \mathbb{E}_{J_{k_{m-1},i}}(F_m)$ として計算するに当たり，各 $1 \leqq i \leqq 2^{k_{m-1}}$ を止めたとき，各 $2N_m(i-1)+1 \leqq j \leqq 2N_m i$ につき

$$F_m\big|J_{k_m,j} = \left(F_{m-1}\big|J_{k_m,j}\right)\cdot\left(f_{k_m}\big|J_{k_m,j}\right) = c_i \cdot g_{k_m}((-1)^{j-1})$$

であるから

$$\mathbb{E}_{J_{k_m,j}}(F_m) = c_i \cdot g_{k_m}((-1)^{j-1})\cdot\left|J_{k_m,j}\right| = 2^{-k_m}c_i g_{k_m}((-1)^{j-1})$$

となる．そこで (1.12), (1.10), (1.13) をこの順に必要箇所で使ってゆけば

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{J_{k_{m-1},i}}(F_m) &= \sum_{j=2N_m(i-1)+1}^{2N_m i} \mathbb{E}_{J_{k_m,j}}(F_m) = \sum_{j=2N_m(i-1)+1}^{2N_m i} 2^{-k_m}c_i g_{k_m}((-1)^{j-1}) \\
&= 2^{-k_m}c_i \sum_{j=N_m(i-1)+1}^{N_m i} \left(g_{k_m}((-1)^{2j-1}) + g_{k_m}((-1)^{2j})\right) = 2^{-k_m}c_i \cdot \left(g_{k_m}(1) + g_{k_m}(-1)\right)N_m \\
&= 2N_m \cdot 2^{-k_m}c_i \cdot \frac{1}{2}\left(g_{k_m}(1) + g_{k_m}(-1)\right) = 2N_m \cdot \mathbb{E}_{J_{k_m,j}}(F_{m-1})\cdot\mathbb{E}(f_{k_m}) \\
&= 2N_m \cdot \frac{1}{2N_m}\mathbb{E}_{J_{k_{m-1},i}}(F_{m-1})\mathbb{E}(f_{k_m}) = \mathbb{E}_{J_{k_{m-1},i}}(F_{m-1})\mathbb{E}(f_{k_m})
\end{aligned}$$

となって (2.9) が導出され積公式 (2.8) の証明が完結する． □

以下積公式 (2.8) の幾つかの応用を述べる．(2.8) に於いて，g_n を恒等関数にとる，即ち $g_n(t) \equiv t$ $(t \in \mathbb{R})$ にとった場合を考えると

$$\mathbb{E}\left(\prod_{\nu=1}^{n} g_{k_\nu}\right) = \prod_{\nu=1}^{n} \mathbb{E}(\rho_{k_\nu})$$

であるが，$\mathbb{P}(\{\rho_{k_\nu} = 1\}) = \mathbb{P}(\{\rho_{k_\nu} = -1\}) = 1/2$ だから，各 $\mathbb{E}(\rho_{k_\nu}) = 0$ である．従って任意の $\mathbb{N}$ の増加列 $k_1 < k_2 \cdots < k_n$ に対して

$$\mathbb{E}\left(\prod_{\nu=1}^{n} \rho_{k_\nu}\right) = 0 \tag{2.14}$$

である．特に，$\mathbb{E}(\rho_i\rho_j) = 0$ $(i \neq j)$ が出る．$I\backslash E_i$ 上 $\rho_i^2 = 1$ であるから，**Rademacher 関数系の正規直交性**

$$\mathbb{E}(\rho_i\rho_j) = \delta_{ij} \quad (\text{Kronecker の delta}) \tag{2.15}$$

が導かれる．これは以後も繰り返し使う計算上重要で便利な関係である．

次に積公式 (2.8) の確率論的な意味合いを述べる．確率を高校で習い始めると条件付確率と絡んで最初の方で出てくる概念に独立性があった．確率空間 $(I, \mathcal{L}, \mathbb{P})$ に於いて事象の族 $\{e\} \subset \mathcal{L}$ が独立であるとは，$\{e\}$ の互いに異なる任意有限 n 個の部分族 $\{e_i\}_{i=1}^n$ に対して

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} e_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(e_i)$$

が成り立つことであった．同様にして，I 上の確率変数の族 $\{\varphi\}$ が**独立**(詳しくは確率論的独立 (stochastically independent)) であるとは，$\{\varphi\}$ の互いに異なる任意有限 n 個の部分族 $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ に対して，任意の Borel 集合列 $(B_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ をとるとき，事象族 $\{(\varphi_i \in B_i)\}_{i=1}^n$ が独立なことである．ここに $(\varphi_i \in B_i) := \{t \in I : \varphi_i(t) \in B_i\} = \varphi_i^{-1}(B_i)$ とする．即ち

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (\varphi_i \in B_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\varphi_i \in B_i) \tag{2.16}$$

となることである．そして，一般的な定理として $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ が独立のときは，積定理

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \varphi_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(\varphi_i) \tag{2.17}$$

が，上の等式の両辺が意味があると言う前提のもとに成立することは，確率論の初等的な基礎知識の一つである ([5] 参照)．

上述の標準的進行に逆行するが，実は (2.6) で与えられた確率変数列が独立であることを積定理 (2.8) から導き得ることを示す．即ち (2.6) で定まる**関数列 $f_n := g_n \circ \rho_n$ $(n \in \mathbb{N})$ は独立である**：$(k_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ を (2.7) の様に定めたものとするとき，**独立条件**

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\nu=1}^n (f_{k_\nu} \in B_{k_\nu})\right) = \prod_{\nu=1}^n \mathbb{P}(f_{k_\nu} \in B_{k_\nu}) \tag{2.18}$$

が成り立つ．ここに $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}$ の任意の Borel 集合列とする．g_n として恒等関数 $g_n(t) \equiv t$ にとった特別の場合として，**Rademacher 関数系 $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の独立性**：

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\nu=1}^n (\rho_{k_\nu} \in B_{k_\nu})\right) = \prod_{\nu=1}^n \mathbb{P}(\rho_{k_\nu} \in B_{k_\nu}) \tag{2.19}$$

と言う大切な事実が導かれる．勿論上記した所は (2.18) が主たる主張で，(2.19) はその系であるが，証明としては先ず (2.19) を最初に示しそれを利用して (2.18) を出す．

$g_n = \chi_{B_n}$ ($\mathbb{R}$ 上の B_n の特性関数) にとった $f_n = \chi_{B_n} \circ \rho_n$ $(n \in \mathbb{N})$ に (2.8) を適用すると

$$\mathbb{E}\left(\prod_{\nu=1}^n \chi_{B_{k_\nu}} \circ \rho_{k_\nu}\right) = \prod_{\nu=1}^n \mathbb{E}\left(\chi_{B_{k_\nu}} \circ \rho_{k_\nu}\right) \tag{2.20}$$

である．$\prod_{\nu=1}^n \chi_{B_{k_\nu}} \circ \rho_{k_\nu}$ の値域は 2 値集合 $\{0,1\}$ であるので，次のものは順次同値である：

$$\prod_{\nu=1}^n \chi_{B_{k_\nu}} \circ \rho_{k_\nu}(t) = 1; \quad \rho_{k_\nu}(t) \in B_{k_\nu}\ (\nu = 1, \cdots, n); \quad t \in \bigcap_{\nu=1}^n (\rho_{k_\nu} \in B_{k_\nu}); \quad \chi_{\cap_{\nu=1}^n (\rho_{k_\nu} \in B_{k_\nu})}(t) = 1.$$

従ってとにかく

$$\mathbb{E}\left(\prod_{\nu=1}^n \chi_{B_{k_\nu}} \circ \rho_{k_\nu}\right) = \mathbb{E}\left(\chi_{\cap_{\nu=1}^n (\rho_{k_\nu} \in B_{k_\nu})}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{\nu=1}^n (\rho_{k_\nu} \in B_{k_\nu})\right) \tag{2.21}$$

である．又各 $\nu = 1, \cdots, n$ に対し $\chi_{B_{k_\nu}} \circ \rho_{k_\nu}$ も $\{0,1\}$ を値域とする 2 値関数故，次は順次同値である．

$$\chi_{B_{k_\nu}} \circ \rho_{k_\nu}(t) = 1; \quad \rho_{k_\nu}(t) \in B_{k_\nu}; \quad t \in (\rho_{k_\nu} \in B_{k_\nu}); \quad \chi_{(\rho_{k_\nu} \in B_{k_\nu})}(t) = 1.$$

従って (2.21) を出したと同様に

$$\mathbb{E}\left(\chi_{B_{k_\nu}} \circ \rho_{k_\nu}\right) = \mathbb{E}\left(\chi_{(\rho_{k_\nu} \in B_{k_\nu})}\right) = \mathbb{P}(\rho_{k_\nu} \in B_{k_\nu}) \tag{2.22}$$

となる．以上 (2.20),(2.21),(2.22) の 3 等式により (2.19) が保証される．最後に本命である (2.18) を導く．$\rho_{k_\nu}(t) \in g_{k_\nu}^{-1}(B_{k_\nu})$ は $\rho_{k_\nu}(t) \in g_{k_\nu}^{-1}(B_{k_\nu}) \cap \{-1,0,1\}$ と同値なので，$B'_n := g_n^{-1}(B_n) \cap \{-1,0,1\} \subset \{-1,0,1\}$ で，$(B'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は Borel 集合列である．よって

$$(f_{k_\nu} \in B_{k_\nu}) = (g_{k_\nu} \circ \rho_{k_\nu} \in B_{k_\nu}) = \left(\rho_{k_\nu} \in g_{k_\nu}^{-1}(B_{k_\nu})\right) = \left(\rho_{k_\nu} \in B'_{k_\nu}\right)$$

である．そこで (2.19) を使って

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{\nu=1}^{n}(f_{k_\nu}\in B_{k_\nu})\Big)=\mathbb{P}\Big(\bigcap_{\nu=1}^{n}\big(\rho_{k_\nu}\in B'_{k_\nu}\big)\Big)=\prod_{\nu=1}^{n}\mathbb{P}\left(\rho_{k_\nu}\in B'_{k_\nu}\right)=\prod_{\nu=1}^{n}\mathbb{P}\left(f_{k_\nu}\in B_{k_\nu}\right),$$

即ち，(2.18) が示されたことになる． □

注意 2.20. 本論文では (2.6) で定めた $f_n := g_n\circ\rho_n$ $(n\in\mathbb{N})$ に対する積公式を示し，その系として $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の独立性を導いた．通常の手順では上述した様に $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の独立性の仮定のもとに，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対する積公式を導くのが標準的である．しかし，実際この証明は，一般の独立な確率変数系に対しては積分論の諸相に基づく割合と面倒なものであるので，それに比べると本論文の手順は非常に簡明である．少なく共現在の $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に関する限りはそうである．勿論 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の独立性を直接示さねばならぬが，その為必要な先ず $\{\rho_n\}$ の独立性の証明も，それから従う $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の独立性の証明も，一般の場合の (2.16) から (2.17) を導く証明と比較して，誠に容易なものであると言える．

3. Khintchine の不等式. 解析学の各分野で屡々重要な役割を演ずる次の不等式に注目する．

或る実数 $p\in(0,\infty)$ のみで定まる正定数 A_p と B_p があって，任意の $n\in\mathbb{N}$ 及び n 個の任意の実数 $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$ に対して次の不等式が成立する：

$$A_p\Big(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\Big)^{1/2}\leqq\Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^{n}a_j\rho_j\Big|^p\Big)^{1/p}\leqq B_p\Big(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\Big)^{1/2}. \tag{3.1}$$

これは Khintchine が 1923 年の論文 [8] で発表したもの故，一般的には (3.1) は **Khintchine の不等式**と呼ばれている．(3.1) の形そのものは Littlewood が 1930 年の論文 [10] に述べた定式化で，Littlewood は Khintchine の論文を見過ごして再生産したものとの事である．(3.1) は $\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\rho_j\right|^p\right)^{1/p}$ を上下両方向から $\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\right)^{1/2}$ で評価するものであるが，上からの評価の部分を単に Khintchine の不等式と呼ぶことも多い．事実，(3.1) で上からの評価が本質的で，それから容易に下からの評価を導き得るのである．(3.1) の (右側の不等式の) 証明は，(3.1) が古い不等式だけに色々と与えられている．我々の前論文 [13] で最も標準的なものを詳細に紹介した．これは純代数的なもので，多項展開を使うのみだから，受験期レベルの高校生にも受け入れ可能なものであった．以下に，大学初年級の微分積分法と，2 節で論じた確率変数の独立系に関する積定理を利用する幾分洒落た証明 ([1] 参照) を叮嚀に説明する．

(3.1) の右側の不等式の証明： 準備的に次の 2 個の不等式の成立を確認する．その第 1 は

$$\cosh t\leqq e^{\frac{t^2}{2}}\quad(t\in\mathbb{R}) \tag{3.2}$$

である．左右両辺の関数を Taylor 級数に展開し，夫々の対応項の係数を比較することで (3.2) の成立を験しかめるのが最も簡単ではないかと思われる．先ず

$$\cosh t=\frac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-1)^nt^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n!}(1+(-1)^n)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}t^{2n}$$

である．他方

$$e^{\frac{t^2}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^nn!}t^{2n}$$

である．$\cosh t$ の taylor 展開の t^{2n} の係数の逆数は $(2n)!$ で $e^{t^2/2}$ の Taylor 展開の t^{2n} の係数の逆数は $2^nn!$ である．所が $n+j\geqq 2$ $(n\geqq 1;\ j=1,\cdots,n)$ だから，$n\geqq 1$ のとき

$$(2n)!=n!\,(n+1)(n+2)\cdots(n+n)\geqq n!\,2\cdot 2\cdots 2=n!\,2^n=2^nn!$$

より，$1/(2\cdot 0)!=1/2^0\,0!$ 及び $1/(2n)!\leqq 1/2^n\,n!$ $(n\geqq 1)$ となり，確かに (3.2) の成立が認められる． □

その第 2 は更に初等的で，$0<p<\infty$ となる p に対して

$$t^p\leqq p^pe^{-p}e^t\quad(t\geqq 0) \tag{3.3}$$

を示したい．変数を t から $t/p =: s \geqq 0$ に換えて (3.3) を書き直すと $s^p \leqq e^{p(s-1)}$ $(s \geqq 0)$ となる．両辺共に負でないから，両辺の p 乗根をとった所の $s \leqq e^{s-1}$ $(s \geqq 0)$ が (3.3) と同値となる．$y := e^{s-1} - s$ とおくとその導関数は $dy/ds = y' = e^{s-1} - 1$ となり，y の変化表 (図 3 参照) から

s	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
y'		$-$	0	$+$	
y	$1/e$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

図 3

$y \geqq 0$ $(s \geqq 0)$ が結論でき (3.3) が確かめられた． $\square$

いよいよ主目標である (3.1) の右側の不等式を証明するのであるが，これを再挙する：$0 < p < \infty$ のみに依存する定数 B_p があって，任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j \rho_j\right|^p\right)^{1/p} \leqq B_p\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\right)^{1/2}. \tag{3.4}$$

が成り立つことを示したい．

$$b_j = a_j \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\right)^{1/2} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

とおくと (3.4) は

$$\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n b_j \rho_j\right|^p\right)^{1/p} \leqq B_p$$

となり，$\sum_{j=1}^n b_j^2 = 1$ である．故に

$$C := \sup\left\{\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j \rho_j\right|^p\right)^{1/p} : \sum_{j=1}^n a_j^2 = 1\right\}$$

とおくと，この C が p のみに依存する正数で上からおさえられる事を示せば証明は完結する．$e^{a_j \rho_j}$ は指数関数 $t \to e^{a_j t}$ と ρ_j との合成関数故，積公式 (2.8) により

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^n e^{a_j \rho_j}\right) = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}\left(e^{a_j \rho_j}\right) \tag{3.5}$$

が成立する．さて

$$f := \sum_{j=1}^n a_j \rho_j \quad \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 = 1\right)$$

と置くならば

$$\mathbb{E}(e^f) = \mathbb{E}\left(e^{\sum_{j=1}^n a_j \rho_j}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^n e^{a_j \rho_j}\right) = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}\left(e^{a_j \rho_j}\right)$$

である．各 $e^{a_j \rho_j}$ を Taylor 展開して

$$e^{a_j \rho_j} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}(a_j \rho_j)^k = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_j^k}{k!}\rho_j^k = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_j^{2k}}{(2k)!}\rho_j^{2k} + \sum_{k=0}^\infty \frac{a_j^{2k+1}}{(2k+1)!}\rho_j^{2k+1}$$

であるが，I 上 a.e. に $\rho_j^{2k} = 1$, $\rho_j^{2k+1} = \rho_j$ であるから，I 上 a.e. に

$$e^{a_j \rho_j} = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_j^{2k}}{(2k)!} + \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{a_j^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\rho_j$$

となる．$\mathbb{E}(\rho_j)=0$ であるから，(3.2) により

$$\mathbb{E}(e^{a_j\rho_j})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}a_j^{2k}=\cosh a_j\leqq e^{\frac{a_j^2}{2}}$$

となる．よって

$$\mathbb{E}(e^f)=\prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}(e^{a_j\rho_j})\leqq\prod_{j=1}^{n}e^{\frac{a_j^2}{2}}=e^{\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^2}{2}}=e^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}a_j^2}=e^{1/2}$$

である．$(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ の代わりに $(-a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ で上記の所を同じ様に行うことが出来るから $\mathbb{E}(e^{-f})\leqq e^{1/2}$ も又同様に正しい．そこで

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(e^{|f|}\big)&=\mathbb{E}_{\{f\geqq 0\}}\big(e^{|f|}\big)+\mathbb{E}_{\{f<0\}}\big(e^{|f|}\big)=\mathbb{E}_{\{f\geqq 0\}}\big(e^{f}\big)+\mathbb{E}_{\{f<0\}}\big(e^{-f}\big)\\&\leqq\mathbb{E}\big(e^f\big)+\mathbb{E}\big(e^{-f}\big)\leqq e^{1/2}+e^{1/2}=2e^{1/2}\end{aligned}$$

に注意して (3.3) を使うと

$$\mathbb{E}\big(|f|^p\big)\leqq\mathbb{E}\big(p^pe^{-p}e^{|f|}\big)=p^pe^{-p}\mathbb{E}\big(e^{|f|}\big)\leqq p^pe^{-p}\cdot 2e^{1/2}=2p^pe^{1/2-p}$$

であるから，両辺の p 乗根をとり

$$\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\rho_j\right|^p\right)^{1/p}\leqq 2^{1/p}pe^{1/2p-1},$$

即ち，$C\leqq 2^{1/p}pe^{1/2p-1}$ となり，目的とする所が達成された． □

(3.1) の左側の不等式の証明： (3.1) の右側の不等式の証明は完結しているので，左側を示すことにより (3.1) の証明が完成する．そこで (3.1) の左側の不等式を (3.4) 同様再掲する：$0<p<\infty$ にのみ依存する正定数 A_p があって，任意の $n\in\mathbb{N}$ と任意の $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$ に対し

$$A_p\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^2\right)^{1/2}\leqq\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\rho_j\right|^p\right)^{1/p}\tag{3.6}$$

が成立することを示したい．前述した様に (3.4) が本質的であって (3.6) は (3.4) の系に過ぎない．事実，その証明も小技的な式変形以外の何者でもない．

$0<p<\infty$ に対して正数 $m=m_p$ を $mp>1$ となる様に一つ好きにとる．とにかく p のみで決まるものである．きちんと決まりをつけたいなら，例えば，$0<p<1$ に対して $m=2/p,\ 1\leqq p<\infty$ に対しては $m=2$ とすることにしても良い．さて $(\rho_j)_{j\in\mathbb{N}}$ の正規直交性 (2.15) により

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\rho_j\right|^2=\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^2\rho_j^2\right)+\mathbb{E}\left(\sum_{i\neq j}^{1,\cdots,n}a_ia_j\rho_i\rho_j\right)=\sum_{j=1}^{n}a_j^2\mathbb{E}\rho_j^2+\sum_{i\neq j}^{1,\cdots,n}a_ia_j\mathbb{E}(\rho_i\rho_j)=\sum_{j=1}^{n}a_j^2$$

である．つまり

$$\sum_{j=1}^{n}a_j^2=\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\rho_j\right|^2\tag{3.7}$$

であるが，これが出発点である．そこで，決め手となる小技は誠に簡単な

$$\sum_{j=1}^{n}a_j^2=\mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\rho_j\right|^{1/m}\cdot\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\rho_j\right|^{(2m-1)/m}\right)$$

である．この右辺に指数 pm 及びその共軛指数 $(pm)^*$ (即ち，$1/(pm)^*+1/pm=1$) で Hölder の不等式を使うと

$$\sum_{j=1}^{n}a_j^2\leqq\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\rho_j\right|^{(1/m)\cdot pm}\right)^{1/pm}\cdot\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\rho_j\right|^{((2m-1)/m)\cdot(pm)^*}\right)^{1/(pm)^*}$$

となる．$(pm)^* = pm/(pm-1)$, $((2m-1)/m)\cdot(pm)^* = (2m-1)p/(pm-1)$ を上に代入すると

$$\sum_{j=1}^n a_j^2 \leqq \left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\rho_j\right|^p\right)^{1/pm} \cdot \left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\rho_j\right|^{(2m-1)p/(pm-1)}\right)^{(pm-1)/pm},$$

或いは両辺を m 乗して

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^m \leqq \left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\rho_j\right|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\rho_j\right|^{(2m-1)p/(pm-1)}\right)^{(pm-1)/p}$$

となる．(3.4) を上の不等式の第 2 因子に適用すると

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\rho_j\right|^{(2m-1)p/(pm-1)}\right)^{(pm-1)/p} &= \left(\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\rho_j\right|^{(2m-1)p/(pm-1)}\right)^{(pm-1)/(2m-1)p}\right)^{2m-1} \\ &\leqq \left(B_{(2m-1)p/(pm-1)}\cdot\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{1/2}\right)^{2m-1} = B_{(2m-1)p/(pm-1)}^{2m-1}\cdot\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{m-1/2}\end{aligned}$$

が出る．従って結局の所

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^m \leqq \left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\rho_j\right|^p\right)^{1/p} \cdot B_{(2m-1)p/(pm-1)}^{2m-1}\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{m-1/2}$$

を得る．そこで，$m = m_p$ は p のみに依存して居る事を確認して，従って，

$$A_p := B_{(2m-1)p/(pm-1)}^{-(2m-1)}$$

は確かに p のみで定まる正定数であるから，上記陳列の不等式の両辺に $A_p\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{-(m-1/2)}$ をかけて

$$A_p\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{1/2} \leqq \left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\rho_j\right|^p\right)^{1/p}$$

が得られる．即ち (3.6) の証明が終わる．□

ここで **Khintchine の不等式 (3.1) の意味**について考える．等式 (3.7) によれば Khintchine の不等式 (3.1) は次の様に言い換えることが出来る：任意の $0 < p < \infty$ に対して，2 と p のみで決まる正定数 $C_{2,p}$ があって，任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$C_{2,p}^{-1}\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\rho_j\right|^2\right)^{1/2} \leqq \left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\rho_j\right|^p\right)^{1/p} \leqq C_{2,p}\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\rho_j\right|^2\right)^{1/2}$$

が成立する．更に一般に，(3.1) は次の陳述とも同値である．即ち，任意の $0 < p, q < \infty$ に対して p と q のみに依存する正定数 $C_{p,q}$ があって，任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$C_{p,q}^{-1}\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\rho_j\right|^p\right)^{1/p} \leqq \left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\rho_j\right|^q\right)^{1/q} \leqq C_{p,q}\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\rho_j\right|^p\right)^{1/p} \tag{3.8}$$

が成り立つ．つまり Khintchine の不等式の真意は $\mathbb{R}$(又は $\mathbb{C}$) の任意の p 位 random 平均は $0 < p < \infty$ に関して互いに比較可能 (comparable) である，と言う所にある．この形で Khintchine の不等式を $\mathbb{R}$ から一般の Banach 空間 X に拡張したものが **Kahane の不等式** [7] ([1] も参照) で，次の様に (3.8) の形式を保って述べられる．指数 $0 < p, q < \infty$ にのみ依存して (X には無関係な) 正定数 $C_{p,q}$ が決まって，任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $x_1, \cdots, x_n \in X$ に対して

$$C_{p,q}^{-1}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|_X^p\right)^{1/p} \leqq \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|_X^q\right)^{1/q} \leqq C_{p,q}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|_X^p\right)^{1/p} \tag{3.9}$$

が成立する．ここに $\|x\|_X$ は X に於ける $x \in X$ のノルムとする．上掲 [7] や [1] では $0 < p, q < \infty$ ではなく $1 \leqq p, q < \infty$ に限定されており，本当に $0 < p, q < \infty$ で良いかどうかであるが，これはあまり深刻な論点ではないと思うが，それよ

りも重大な疑問点として，Banach 空間 X を，現在我々の目指しているそして次の第 4 節で導入する縮約 Banach 空間 X に置きかえて (3.9) が得られるか否かは大切な未解決問題であると思う．

Rademacher 関数導入の動機となった Rademacher の定理を，Khintchine の不等式を念頭に於いて観察すると，不等式自身の更に深い理解を促し，大変に興味深い．その為に Rademacher の定理及びそれを補完した Khintchine-Kolmogoroff の定理を以下に詳述する ([4] 参照)．元となる級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ に対して各項の符号を様々に与えた符号付級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \pm a_n$ を考える．Rademacher 関数系 $\rho(t) = (\rho_1(t), \cdots, \rho_n(t), \cdots)$ $(t \in I)$ がすべての符号列を表し，$\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n$ $(t \in I)$ が $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ を基とする符号付級数の全体である．$\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n (t \in I)$ を $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ から生ずる random 級数 (random series) と言う．その収束発散を調べる．任意に一つの random 級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n$ を選ぶとき，その収束する確率はいくつかと問う．即ち，$\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n$ が収束する様な $t \in I$ の集合を B とするとき $\mathbb{P}(B)$ はいくつかと言う問である．I の 2 進有理数の全体を E と記したが，$\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n$ が最終的に本質的原符号，即ちある番号 n_0 があってすべての $\rho_n(t) = 1$ $(n \geqq n_0)$ 又は $\rho_n(t) = -1$ $(n \geqq n_0)$ である様なものが $t \in E$ である．対応は $1:2$ であるので，$\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n$ が最終的原符号である t の全体は E で，$\#E = \aleph_0$ より $\mathbb{P}(E) = 0$ であり，どの $\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n$ の収束発散も $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ のそれと一致するので，$\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n$ $(t \in E)$ には興味がない．従って $\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n$ $(t \in I\backslash E)$ は最終的非原符号の符号付級数と $1:1$ に対応するので，random 級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n$ は $t \in I\backslash E$ に限定して考えてよい．特に $\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n$ が収束する様な $t \in I\backslash E$ の集合 B の確率 $\mathbb{P}(B) = 1$ であるとき，random 級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n$ は殆ど確実 (almost surely) に収束すると言う．これらの用語を使って次の事実を述べる．

定理 3.10 (Rademacher-Khintchine-Kolmogoroff). 級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ から生ずる random 級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n$ が殆ど確実に収束する為の必要十分条件は $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty$ となることである.

条件の十分性を示したのが 1922 年の Rademacher の論文 [17] で，ここに Rademacher 関数が初めて登場する．この結果に対して 1925 年 Khintchine-Kolmogoroff の共著論文 [9] で条件の必要性の証明を与えた．Khintchine の不等式の論文 [8] は 1923 年に Khintchine が発表している．これらの研究の 1922 年 – 1923 年 – 1925 年の時系列に想いを馳せたい．

十分性の証明： 基になる級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ に対し条件

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty \tag{3.11}$$

を賦課するならば，$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ から生ずる random 級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n$ は殆ど確実に収束である，即ち $\mathbb{P}(F) = 1$ である可測集合 $F \subset I$ があって，各 $t_0 \in F$ につき $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\rho_n(t_0)$ は収束級数である，ことを証明する．各 $n \in \mathbb{N}$ につき

$$s_n(t) := \sum_{1\leqq j\leqq n} a_j\rho_j(t)$$

とおくならば，$s_n(t_0)$ が収束列となることを示したい訳である．$\{\rho_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ は $L_2 = L_2(I, \mathcal{L}, \mathbb{P})$ 内の正規直交系:$\mathbb{E}(\rho_i{\cdot}\rho_j) = \delta_{ij}$ $(i, j \in \mathbb{N})$, であるから ((2.15) 参照), $m < n$ とするとき，L_p ノルムを $\|\cdot\|_{L_p}$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ と記すとすると

$$\|s_n - s_m\|_{L_2}^2 = \mathbb{E}\Big|\sum_{m<j\leqq n} a_j\rho_j\Big|^2 = \mathbb{E}\Big(\sum_{i,j}^{m+1,\cdots,n} a_ia_j\rho_i\rho_j\Big) = \sum_{i,j}^{m+1,\cdots,n} a_ia_j\mathbb{E}(\rho_i\cdot\rho_j) = \sum_{i,j}^{m+1,\cdots,n} a_ia_j\delta_{ij} = \sum_{m<j\leqq n} a_j^2$$

となる．従って

$$\|s_n - s_m\|_{L_2} \leqq \Big(\sum_{m<j\leqq n} a_j^2\Big)^{1/2} \quad (m \leqq n) \tag{3.12}$$

である．これは $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が L_2 内の Cauchy 列であることを示すので，Riesz-Fisher の定理 1) に依れば，或 $S \in L_2$ が定まって $\|s_n - S\|_{L_2} \to 0$ $(n \to 0)$ となり，更に $\mathbb{N}$ の等終部分列 $\mathbb{N}'$ が定まり，I 上 a.e. に $s_{n'}(t) \to S(t)$ $(n' \in \mathbb{N}', n' \to \infty)$ となる．所で Schwarz の不等式により

$$\|s_n - s_m\|_{L_1}^2 = \big(\mathbb{E}|s_n - s_m|\big)^2 = \big(\mathbb{E}(|s_n - s_m|\cdot 1)\big)^2 \leqq \big(\mathbb{E}|s_n - s_m|^2\big)\cdot\big(\mathbb{E}1^2\big) = \|s_n - s_m\|_{L_2}^2$$

が導かれ，(3.12) と合わせて

---

1) Banach 空間 L_p $(1 \leqq p < \infty)$ の Cauchy 列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，或 $S \in L_p$ が定まって，$\|s_n - S\|_{L_p} \to 0$ $(n \to \infty)$ であり (即ち，L_p は完備), 更に $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の或部分列 $(s_{n'})_{n'\in\mathbb{N}'}$ ($\mathbb{N}'$ は $\mathbb{N}$ の等終部分列) がみつかって，I 上 a.e. に $s_{n'}(t) \to S(t)$ $(n' \to \infty)$ となる．この事実を，特に L_2 の場合には，古くから **Riesz-Fisher の定理** と呼んでいる．

$$\|s_n - s_m\|_{L_1} \leqq \|s_n - s_m\|_{L_2} \leqq \left(\sum_{m<j\leqq n} a_j^2 \right)^{1/2} \tag{3.13}$$

となる．従って $(s_{n'})_{n'\in\mathbb{N}'}$ は L_1 の Cauchy 列なので，或 $S_1 \in L_1$ が定まって $\|s_{n'} - S_1\|_{L_1} \to 0$ $(n' \in \mathbb{N}', n' \to \infty)$ となり，更に $\mathbb{N}'$ の等終部分列 $\mathbb{N}''$ が定まって，I 上 a.e. に $s_{n''}(t) \to S_1(t)$ $(n'' \in \mathbb{N}'', n'' \to \infty)$ となる．勿論元々 I 上 a.e. に $s_{n'}(t) \to S(t)$ $(n' \in \mathbb{N}', n' \to \infty)$ であったから，I 上 a.e. に $s_{n''}(t) \to S(t)$ $(n'' \in \mathbb{N}'', n'' \to \infty)$ でもあり，依って I 上 a.e. に $S(t) = S_1(t)$, 即ち $S = S_1 \in L_1$ でもある．以上綜合して，要するに或 $S \in L_1$ が定まって，任意の $B \in \mathcal{L}$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \int_B (S(t) - s_n(t))\,dt = 0 \tag{3.14}$$

となる．$S \in L_1$ に基づき，不定積分 $x \mapsto \int_0^x S(t)\,dt : I \to \mathbb{R}$ に Lebesgue の定理 [2] を使うと，$F \in \mathcal{L}, F \subset I\backslash E, \mathbb{P}(F) = 1$ かつ各 $t_0 \in F$ に対して $x = t_0$ で不定積分 $\int_0^x f(t)\,dt$ は微分可能で

$$\left[\frac{d}{dx} \int_0^x S(t)\,dt \right]_{x=t_0} = S(t_0) \tag{3.15}$$

となる様な $F \subset I$ が定まる．そこで任意の $t_0 \in F$ を固定する．$F \subset I\backslash E$ なので，任意の位数 $n \in \mathbb{N}$ に対し，t_0 は n 位開区間のどれかに含まれる．故に各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$t_0 \in (\alpha_n, \beta_n) := \left(\frac{k_n - 1}{2^n}, \frac{k_n}{2^n} \right) \quad (1 \leqq k_n \leqq 2^n)$$

が定まって

$$(\alpha_1, \beta_1) \supset (\alpha_2, \beta_2) \supset \cdots \supset (\alpha_n, \beta_n) \supset (\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) \supset \cdots \searrow \{t_0\}$$

となる．任意に $m < n$ をとる．

$$s_n - s_m = a_{m+1}\rho_{m+1} + a_{m+2}\rho_{m+2} + \cdots + a_n\rho_n$$

を (α_m, β_m) 上で考える．$m < i$ である各 i で ρ_i を考えると，(α_m, β_m) の中に $\rho_i = 1$ である第 i 位区間と $\rho_i = -1$ である第 i 位区間が第 m 位区間 (α_m, β_m) の中に同数あって，これらで (α_m, β_m) を，有限個の E の点を除いて埋め尽くしているから

$$\int_{\alpha_m}^{\beta_m} \rho_i(t)\,dt = 0 \quad (m < i)$$

である．従って

$$\int_{\alpha_m}^{\beta_m} \big(s_n(t) - s_m(t)\big)dt = 0 \quad (m < n) \tag{3.16}$$

となる．反対に

$$s_m = a_1\rho_1 + a_2\rho_2 + \cdots + a_m\rho_m$$

を (α_m, β_m) で考えると，$1 \leqq i \leqq m$ である各 i で ρ_i は一定値なので，s_m も一定値であり，$t_0 \in (\alpha_m, \beta_m)$ だから，結局 $s_m|(\alpha_m, \beta_m) = s_m(t_0)$ となり

$$\int_{\alpha_m}^{\beta_m} s_m(t)\,dt = s_m(t_0)(\beta_m - \alpha_m) \tag{3.17}$$

である．(3.16) と (3.17) より

$$\int_{\alpha_m}^{\beta_m} s_n(t)\,dt = s_m(t_0)(\beta_m - \alpha_m) \quad (m < n)$$

で，ここで $n \nearrow \infty$ とすると，(3.14) により

---

2) $S \in L_1$ の不定積分 $\int_0^x S(t)\,dt$ は上端 x に関して，I 上 a.e. に微分可能でその導関数は $S(x)$ となる．この事実を **Lebesgue の定理** と言う．

$$(3.18) \qquad \frac{1}{\beta_m-\alpha_m}\int_{\alpha_m}^{\beta_m} S(t)\,dt = s_m(t_0)$$

となる．任意の正数 $\varepsilon>0$ に対し $\alpha_m<t_0<\beta_m$ かつ $\alpha_m,\beta_m\to t_0$ $(m\to\infty)$ であるので，(3.15) によりある $m_0\in\mathbb{N}$ が決まって $m_0<m$ である限り

$$\left|\frac{1}{t_0-\alpha_m}\int_{\alpha_m}^{t_0} S(t)\,dt - S(t_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \left|\frac{1}{\beta_m-t_0}\int_{t_0}^{\beta_m} S(t)\,dt - S(t_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

となる．

$$\frac{1}{\beta_m-\alpha_m}\int_{\alpha_m}^{\beta_m} S(t)\,dt = \frac{t_0-\alpha_m}{\beta_m-\alpha_m}\cdot\frac{1}{t_0-\alpha_m}\int_{\alpha_m}^{t_0} S(t)\,dt + \frac{\beta_m-t_0}{\beta_m-\alpha_m}\cdot\frac{1}{\beta_m-t_0}\int_{t_0}^{\beta_m} S(t)\,dt$$

だから，これと

$$S(t_0)=\frac{t_0-\alpha_m}{\beta_m-\alpha_m}S(t_0)+\frac{\beta_m-t_0}{\beta_m-\alpha_m}S(t_0)$$

の辺々対応項の差を作ると

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\beta_m-\alpha_m}\int_{\alpha_m}^{\beta_m} S(t)\,dt - S(t_0)\right| &\leqq \frac{t_0-\alpha_m}{\beta_m-\alpha_m}\cdot\left|\frac{1}{t_0-\alpha_m}\int_{\alpha_m}^{t_0} S(t)\,dt - S(t_0)\right| + \frac{\beta_m-t_0}{\beta_m-\alpha_m}\cdot\left|\frac{1}{\beta_m-t_0}\int_{t_0}^{\beta_m} S(t)\,dt - S(t_0)\right| \\ &\leqq \frac{t_0-\alpha_m}{\beta_m-\alpha_m}\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\beta_m-t_0}{\beta_m-\alpha_m}\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即ち $m_0<m$ なる限り

$$\left|\frac{1}{\beta_m-\alpha_m}\int_{\alpha_m}^{\beta_m} S(t)\,dt - S(t_0)\right|<\varepsilon$$

となる．これは

$$(3.19) \qquad \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\beta_m-\alpha_m}\int_{\alpha_m}^{\beta_m} S(t)\,dt = S(t_0)$$

を意味する．故に (3.18) と (3.19) から

$$\lim_{m\to\infty} s_m(t_0)=S(t_0),$$

即ち，F 上 $s_m\to S$ となる． □

必要性の証明： 級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ から生ずる random 級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\rho_n(t)$ が殆ど確実に収束する，即ち，I 上 a.e. に $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\rho_n(t)$ が収束する，ならば，(3.11)：$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2<\infty$ が導かれることの証明を与える．そこで各 $n\in\mathbb{N}$ につき

$$s_n(t):=\sum_{1\leqq j\leqq n} a_j\rho_j(t)\quad (t\in I)$$

と置く．我々の仮定は，I 上の或る可測関数 $S(t)$ があって，I 上 a.e. に $s_n(t)\to S(t)$ となることである．つまり，或る $F_0\in\mathcal{L}$, $F_0\subset I\backslash E$ で $\mathbb{P}(F_0)=1$ かつ各 $t\in F_0$ に対して $s_n(t)\to S(t)$ となることである．Lusin の定理 [3] によれば，或るコムパクト集合 F_1 で，$F_1\subset F_0$, $\mathbb{P}(F_1)>0$ があって，すべての $s_n\in C(F_1)$ $(n\in\mathbb{N})$ かつ $S\in C(F_1)$ と出来る．Egoroff の定理 [4] により，或るコムパクト集合 F で $F\subset F_1$, $\mathbb{P}(F)>0$ かつ F 上一様に $s_n\to S$ となるものがとれる．従って，結局或るコムパクト集合 $F\subset I$ で $\mathbb{P}(F)>0$ となるものがあって s_n, S がすべて F 上連続関数で $\sup_F|s_n-S|\to 0$ $(n\to\infty)$ であると言う仮定から出発して (3.11) を導き出せばよい．そうであるならば，或定数 $M>0$ が定まって，任意の $1\leqq m\leqq n$ に対し $|s_n(t)-s_m(t)|\leqq M$ $(t\in F)$ となる．よって，特に $\mathbb{P}(F)=|F|$ と記して

---

3) $\mathbb{P}(B)>0$ である $B\in\mathcal{L}$ 上の可測関数 f に対し $\mathbb{P}(B_1)$ がいくらでも $\mathbb{P}(B)$ に近い $B_1\in\mathcal{L}$, $B_1\subset B$ で $f|B_1$ が B_1 上連続である様に出来る．これを **Lusin の定理** と言う．

4) $\mathbb{P}(B)>0$ である $B\in\mathcal{L}$ 上の可測関数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で或る可測関数 f に B 上 a.e. に収束する様なものがあるとする．そのとき $\mathbb{P}(B_1)$ がいくらでも $\mathbb{P}(B)$ に近い様な $B_1\in\mathcal{L}$, $B_1\subset B$ があって，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が B_1 上では f に一様収束する様に B_1 を取ることが出来る．この主張を **Egoroff の定理** と言う．

$$\int_F |s_n(t)-s_m(t)|^2\,dt \leqq M^2\int_F dt = M^2\,|F|$$

である．さて，F の I 上の特性関数を χ_F とかいて

$$\int_F |s_n(t)-s_m(t)|^2\,dt = \int_0^1 \chi_F(t)\,|s_n(t)-s_m(t)|^2\,dt = \int_0^1 \chi_F(t)\Big|\sum_{m<j\leqq n} a_j\rho_j(t)\Big|^2 dt$$

とも書ける．それ故

$$\begin{aligned}
M^2\,|F| &\geqq \int_0^1 \chi_F(t)\Big(\sum_{m<j\leqq n} a_j\rho_j\Big)^2 dt = \int_0^1 \chi_F(t)\Big(\sum_{m<j\leqq n} a_j^2 + 2\sum_{j<k}^{m+1,\cdots,n} a_ja_k\rho_j(t)\rho_k(t)\Big)dt \\
&= |F|\sum_{m<j\leqq n} a_j^2 + 2\sum_{j<k}^{m+1,\cdots,n} a_ja_k\int_0^1 \chi_F(t)\rho_j(t)\rho_k(t)\,dt \\
&\geqq |F|\sum_{m<j\leqq n} a_j^2 - 2\sum_{j<k}^{m+1,\cdots,n} |a_ja_k|\cdot\Big|\int_0^1 \chi_F(t)\rho_j(t)\rho_k(t)\,dt\Big|
\end{aligned}$$

となる．この最後の項に Schwarz の不等式を適用すると

$$\begin{aligned}
M^2\,|F| &\geqq |F|\sum_{m<j\leqq n} a_j^2 - 2\Big(\sum_{j<k}^{m+1,\cdots,n} a_j^2a_k^2\Big)^{1/2}\cdot\Big(\sum_{j<k}^{m+1,\cdots,n}\Big(\int_0^1 \chi_F(t)\rho_j(t)\rho_k(t)\,dt\Big)^2\Big)^{1/2} \\
&\geqq |F|\sum_{m<j\leqq n} a_j^2 - 2\Big(\sum_{m<j\leqq n} a_j^2\Big)\cdot\Big(\sum_{j<k}^{m+1,\cdots,n}\Big(\int_0^1 \chi_F(t)\rho_j(t)\rho_k(t)\,dt\Big)^2\Big)^{1/2}
\end{aligned}\tag{3.20}$$

が出る．ここで上記最右辺の第 2 項の第 2 因子について考える．

$$\rho_j(t)\rho_k(t) \quad (j<k; j,k=m+1,\cdots,n)$$

は L_2 の正規直交系を作り，$\int_0^1 \chi_F(t)\rho_j(t)\rho_k(t)\,dt$ はその系に関する χ_F の Fourier 係数であるから，Bessel の不等式より

$$\sum_{j<k}^{m+1,\cdots,n}\Big(\int_0^1 \chi_F(t)\rho_j(t)\rho_k(t)\,dt\Big)^2 \leqq \|\chi_F\|_{L_2}^2 = |F|^2 \quad (1\leqq m\leqq n)$$

であり，これから

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j<k}^{m+1,\cdots,n}\Big(\int_0^1 \chi_F(t)\rho_j(t)\rho_k(t)\,dt\Big)^2 = 0$$

となる．よってある $m_0\in\mathbb{N}$ があって，$m_0\leqq m\leqq n$ を任意にとって

$$\sum_{j<k}^{m+1,\cdots,n}\Big(\int_0^1 \chi_F(t)\rho_j(t)\rho_k(t)\,dt\Big)^2 < \frac{1}{16}|F|^2$$

となる．従って (3.20) に戻って

$$M^2\,|F| \geqq \Big(\sum_{m<j\leqq n} a_j^2\Big)|F| - 2\Big(\sum_{m<j\leqq n} a_j^2\Big)\cdot\Big(\frac{1}{16}|F|^2\Big)^{1/2} \geqq \frac{1}{2}|F|\Big(\sum_{m<j\leqq n} a_j^2\Big) \qquad (m_0\leqq m\leqq n)$$

となり，従って

$$\sum_{m<j\leqq n} a_j^2 \leqq 2M^2 \qquad (m_0\leqq m\leqq n)$$

であるから (3.11) が結論出来る． □

Rademacher の定理は (3.11) : $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty$ から殆どすべての $t \in I$ に対する $\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n$ の収束性を主張するものである．$\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n$ の収束を L_p 収束に置きかえることを考えると，実はすべての $1 \leqq p < \infty$ ($0 < p < \infty$ で良いのだが) について置き換え可能と言う結論を出しているものが Khintchine の不等式 (の右側) とも言える．Rademacher の論文が 1922 年に出ているから，1923 年の Khintchine 不等式論文にこの Rademacher 定理の影響が幾分でもあり得たと考えることは非常に無理ではない．Rademacher の定理の逆，即ち，殆どすべての $t \in I$ に対する $\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n$ の収束性から (3.11) : $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty$ を結論出来るか否かに肯定的に答えた 1925 年の Khintchine-Kolmogoroff の論文については，もし $\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(t)a_n$ の収束が L_p 収束で問われていたなら Khintchine にとっては勿論自明なことであったろうし，本来の収束であったにしろ，やはり容易に見通せたことは確かであろう．勿論 Littlewood 型定式化を元々 Khintchine が意識しているとしての話ではあるが．いずれにしろ，表面上はとにかく，雰囲気的には，Rademacher-Khintchine-Kolmogoroff の定理も Khintchine の不等式も基本思想を共有している同一時代の産物と思っても良いのではあるまいか．

4. 位相線形空間. 通常最も素朴な関数解析の主要舞台は，もっとも広くは位相線形空間である．目的に応じてその様々な範疇に分けられた部分族を考察する．ここに新たに一つの空間を導入したいので，その全体の中での立ち位置を明確にすることも念頭に置いて，これら様々の部分族を鳥瞰する．[3], [18] 等参照．まず一番広い範疇内にあるのが**位相線形空間** (topological linear space) X で，その定義として，まず X は線形空間で，同時に X は Hausdorff 空間で，写像 $(x, y) \mapsto x - y : X \times X \to X$ 及び $(\alpha, x) \mapsto \alpha x : \mathbb{R} \times X \to X$ が共に連続となるものとする．

線形空間 X 上の関数 $x \mapsto \|x\|_X : X \to \mathbb{R}$ が Fréchet ノルム であるとは，常に $\|x\|_X \geqq 0$ であり，$x = 0$ のときかつそのときに限り $\|x\|_X = 0$; $\|-x\|_X = \|x\|_X$; $\|x+y\|_X \leqq \|x\|_X + \|y\|_X$, の 3 条件を満たすことである．$X$ が **Fréchet 空間**であるとは，とにかく X は 位相線形空間で，特にその Hausdorff 位相は，X 上の Fréchet ノルムによる距離 $\|x-y\|_X$ の惹起する**完備**距離空間の位相で与えられたものである．関数解析の基本三原理中，一様有界原理と開写像原理の二つはこの Fréchet 空間の範疇内で成立し，残る所の拡張原理は後出の Banach 空間の範疇迄部分族が狭められる迄待たねばならない．

ここからが我々の新提案である．線形空間 X 上の関数 $x \mapsto \|x\|_X : X \to \mathbb{R}$ が**縮約ノルム** (contracted norm) であるとは，これが次の 3 条件をみたすことである：

(a) **正定値性**： $\|x\|_X \geqq 0$ であり，$\|x\|_X = 0$ と $x = 0$ は同値である；

(b) **斉次性**： $(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times X$ に対して $\|\alpha x\|_X = |\alpha|\,\|x\|_X$ となる；

(c) **縮約三角不等式**： 或る $s > 0$ があって，すべての $(x, y) \in X \times Y$ に対し

$$\|x+y\|^s \leqq \|x\|^s + \|y\|^s . \tag{4.1}$$

上記 3 条件中 (c) で顔を出す正数 s をこの縮約ノルムの，或いはこの縮約ノルムを載せている空間 X の**縮約示数** (contraction index) と言う．縮約ノルム $\|x\|_X$, 或いはその積載位相線形空間 X の，縮約示数 s について若干のすぐわかる性質を述べよう．先ず $X = \{0\}$ と言う自明な場合は常に考察外に置くという当然の仮定を置くことにして，**縮約示数 s は常に $0 < s \leqq 1$ を満たす**ことを示そう．事実 $x \neq 0$ となる $x \in X$ を任意に取って固定する．(4.1) をこの x と $y = x$ で考える．(b) と (c) から

$$2^s \|x\|_X^s = \|2x\|_X^s = \|x+x\|_X^s \leqq \|x\|_X^s + \|x\|_X^s = 2\|x\|_X^s ,$$

即ち $2^s \|x\|_X^s \leqq 2\|x\|_X^s$ であるが，この両辺を $\|x\|_X^s \neq 0$ で割ると $2^s \leqq 2$ だから $s \leqq 1$ が出る．この故に (4.1) を縮約三角不等式と呼び，又 $\|x\|_X$ を (4.1) の故に縮約ノルムと名付けた訳である．次に任意の縮約示数 s をとるとき，更に $0 < t < s$ である任意の t をとると，t も又縮約示数である．何者，$\mathbb{R}$ に対する通常の縮約三角不等式 5) を使うと $t/s < 1$ だから

$$\|x+y\|_X^t = \|x+y\|_X^{s\cdot\frac{t}{s}} \leqq (\|x\|_X^s + \|y\|_X^s)^{\frac{t}{s}} \leqq \|x\|_X^{s\cdot\frac{t}{s}} + \|y\|_X^{x\cdot\frac{t}{s}} = \|x\|_X^t + \|y\|_X^t ,$$

即ち，すべての X の元 x と y に対して $\|x+y\|_X^t \leqq \|x\|_X^t + \|y\|_X^t$ となるので，t も又縮約示数である．この様に X の縮約示数は $(0,1]$ の 0 から始まる部分区間を形成し，その区間の上限 σ_X も又縮約示数であることは容易に分かるので，X の縮約示数全体は，半開半閉の $(0,1]$ の部分区間

$$(0, \sigma_X], \qquad 0 < \sigma_X \leqq 1 \tag{4.2}$$

である．特に $\|x+y\|_X^{\sigma_X} \leqq \|x\|_X^{\sigma_X} + \|y\|_X^{\sigma_X}$ であるので，更に明らかに $\|\cdot\|^{\sigma_X}$ は正定値性と $\|-x\|^{\sigma_X} = \|x\|^{\sigma_X}$ の二条件

---

5) 2 正数 a と b 及び $0 < \alpha < 1$ である指数 α に対して，常に不等式 $(a+b)^\alpha \leqq a^\alpha + b^\alpha$ が成立する．この不等式を $\mathbb{R}$ 上の縮約三角不等式と呼び，初等的ながら終始便利に使われる有用な不等式である．

も満たすので，$\|x\|^{\sigma_X}$ は X 上の Fréchet ノルム である．σ_X を X の**最大縮約示数**と呼ぶ．

そこで $(X, \|\cdot\|_X^{\sigma_X})$ が Fréchet 空間となるとき，X, 或いは詳しくは，$(X, \|\cdot\|_X)$ を**縮約 Banach 空間** (contracted Banach space) と言う．$\sigma_X = 1$ となるとき $\|\cdot\|_X$ を非縮約ノルム，又は単にノルム，$(X, \|\cdot\|_X)$ を非縮約 Banach 空間，又は単に **Banach 空間**と呼ぶ．

以上いずれの空間 X も基本的な枠組みは同一である．先ずどの X も線形構造と位相構造の 2 構造から成り，ついで加法演算 $(x, y) \mapsto x + y$ とスカラー倍 $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ の 2 演算が共に連続である．Fréchet 空間 X の場合には位相が Fréchet ノルム $\|\cdot\|_X$ による**完備的**距離 $\|x - y\|_X$ により与えられているので，加法演算は自動的に連続であるが，スカラー倍の連続性は何ものかを仮定しない限り保証されない．例えば $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ の各変数毎の連続性を仮定すれば出る (角谷の定理 [18] 参照) 等であるが，いっそ自動的に出ない以上，初めから仮定してしまう方が現実的である．縮約 Banach 空間 X の場合には，その位相が縮約ノルム $\|\cdot\|_X$ による Fréchet ノルム $\|\cdot\|_X^{\sigma_X}$ から出る完備的距離 $\|x - y\|_X^{\sigma_X}$ により与えられているので，加法，スカラー倍の 2 演算共連続性が自動的に出る．従って Banach 空間 X の場合も同様である．要するに我々は Fréchet 空間と Banach 空間の間に新たに 縮約 Banach 空間と言う新ジャンルを挿入したのである (図 4 参照)．

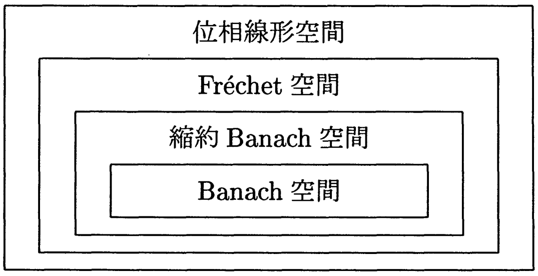

図 4

導入の動機は，Lebesgue 空間 $L_p(\mu)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ は Banach 空間であるが，Lebesgue 空間 $L_p(\mu) (0 < p < 1)$ は Banach 空間の範疇から逸脱してしまうことの救済のためである．Banach 空間論の型・余型理論は $L_p(\mu)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ の研究に大変有効であるが，$L_p(\mu)$ $(0 < p < 1)$ にはこれが Banach 空間でないので適用出来ない．勿論 Fréchet 空間ではあるが，Fréchet 空間では型・余型理論を十分に展開するだけの図形的位相，つまり幾何の精度が足りない．そこで Lebesgue 空間 $L_p(\mu)$ $(0 < p \leqq \infty)$ の全部を含む程広いが，型・余型理論の展開を支持出来る程度には狭い空間の範疇として 縮約 Banach 空間を導入した．従って当然ながら，Lebesgue 空間 $L_p(\mu)$ $(0 < p \leqq \infty)$ は 縮約 Banach 空間の重要な典型例である．その立場から Lebesgue 空間 $L_p(\mu)$ $(0 < p \leqq \infty)$ を以下で考える．

Lebesgue 空間. 抽象空間 Ω の部分集合からなる σ 代数 Σ 上の測度 μ の三者は測度空間 (Ω, Σ, μ) を作る．古典解析を念頭におくかぎり，次の 2 仮定を置くことは意味あることと言える．第一に (Ω, Σ, μ) は **σ 有限**，即ち $\mu(\Omega_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$ となる増加列 $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ で $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ となるものが取れる；第二に (Ω, Σ, μ) は**非自明**，即ち $S_n \cap S_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ で $0 < \mu(S_n) < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$ となる列 $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ が存在する．各 $0 < p < \infty$ に対し

$$\int_\Omega |f(\omega)|^p \, d\mu(\omega) < \infty$$

となる Ω 上の Σ 可測関数 f の全体を $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ と記せばこれは線形空間となる．更に各 $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ に対し

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(\omega)|^p \, d\mu(\omega) \right)^{1/p} \qquad (0 < p < \infty) \tag{4.3}$$

をその **p ノルム** (又は L_p ノルム) と呼び，$L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ を **p 位の Lebesgue 空間**と言う．

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} |f(\omega)| < \infty$$

となる Σ 可測関数 f の全体を $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ と記すと，これも又線形空間である．更に

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$$

は f の **∞ ノルム** (又は L_∞ ノルム) と呼び，$L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ を **∞ 位の Lebesgue 空間**と呼ぶ．ここでは次の主張を証明する：

Lebesgue 空間 $L_p(\Omega,\Sigma,\mu)$ $(0<p\leqq\infty)$ は縮約 Banach 空間でその最大縮約示数 $\sigma_{L_p(\Omega,\Sigma,\mu)}$ は

$$\sigma_{L_p(\Omega,\Sigma,\mu)} = p\wedge 1 \tag{4.4}$$

で与えられる.[6)]

証明 : 先ず $p\in[1,\infty]$ であるとき，p ノルム $\|\cdot\|_p$ はノルム (即ち，非縮約ノルム) であり，$L_p(\Omega,\Sigma,\mu)$ は，非縮約的 Banach 空間，つまり Banach 空間で，$\sigma_{L_p(\Omega,\Sigma,\mu)}=1$ である．$p\geqq 1$ 故 $p\wedge 1=1$ だから (4.4) も正しい．次に $p\in(0,1)$ とする．このとき，$L_p(\Omega,\Sigma,\mu)$ が Fréchet ノルム $\|\cdot\|_p^p$ による Fréchet 空間となることは周知の通りである．各 $f\in L_p(\Omega,\Sigma,\mu)$ に対し

$$\|f\|_p^p=\int_\Omega |f(\omega)|^p\,d\mu(\omega)$$

であるから，$f,g\in L_p(\Omega,\Sigma,\mu)$ に対し，$\mathbb{R}$ 上の縮約三角不等式により

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p&=\int_\Omega |f(\omega)+g(\omega)|^p\,d\mu(\omega)\leqq\int_\Omega(|f(\omega)|+|g(\omega)|)^p d\mu(\omega)\\ \leqq\int_\Omega(|f(\omega)|^p+|g(\omega)|^p)\,d\mu(\omega)&=\int_\Omega|f(\omega)|^p\,d\mu(\omega)+\int_\Omega|g(\omega)|^p\,d\mu(\omega)=\|f\|_p^p+\|g\|_p^p,\end{aligned}$$

即ち、$\|f+g\|_p^p\leqq\|f\|_p^p+\|g\|_p^p$ となるから，p は確かに $L_p(\Omega,\Sigma,\mu)$ の縮約示数の一つであることがわかる．次に $L_p(\Omega,\Sigma,\mu)$ の任意の一つの縮約示数 $0<r\leqq 1$ をとる．(Ω,Σ,μ) は非自明故 $S_1\cap S_2=\emptyset$ かつ $0<\mu(S_j)<\infty$ である $S_j\in\Sigma$ $(j=1,2)$ を選べる．そこで $f_j:=\mu(S_j)^{-1/p}\chi_{S_j}$, χ_{S_j} は Ω 上 S_j の特性関数，とおくと，$f_j\in L_p(\Omega,\Sigma,\mu)$ $(j=1,2)$ で，縮約三角不等式

$$\|f_1+f_2\|_p^r\leqq\|f_1\|_p^r+\|f_2\|_p^r \tag{4.5}$$

が成り立つ．上式左辺については，$S_3=\Omega\backslash(S_1\cup S_2)$ とおいて

$$\begin{aligned}\|f_1+f_2\|_p^r&=\left(\int_\Omega|f_1+f_2|^p\,d\mu\right)^{r/p}=\left(\left(\int_{S_1}+\int_{S_2}+\int_{S_3}\right)|f_1+f_2|^p\,d\mu\right)^{r/p}\\&=\left(\int_{S_1}\mu(S_1)^{-1}d\mu+\int_{S_2}\mu(S_2)^{-1}d\mu+\int_{S_3}0\,d\mu\right)^{r/p}=2^{r/p}\end{aligned} \tag{4.6}$$

であり，次いで (4.5) の右辺各項については

$$\|f_j\|_p^r=\left(\int_{S_j}\mu(S_j)^{-1}d\mu\right)^{r/p}=1\quad(j=1.2) \tag{4.7}$$

だから，(4.5), (4.6), (4.7) より，$2^{r/p}\leqq 2$ となる．これより $r/p\leqq 1$, 又は $r\leqq p$ となる．故に縮約示数達は p を超えず，p も縮約示数だから，最大縮約示数 $\sigma_{L_p(\Omega,\Sigma,\mu)}=p$ となる．$0<p<1$ より $p=p\wedge 1$ だから (4.4) はこの場合も正しい． □

測度空間 (Ω,Σ,μ) の三成分 Ω,Σ,μ は無論どれも重要だけれど，測度 μ に目を付けたら，Ω と Σ はその前提として既に了解されているものと考えられる．つまり (Ω,Σ,μ) は μ で代表されて居る所であると言う解釈に基づいて $L_p(\Omega,\Sigma,\mu)$ を簡単に $\boldsymbol{L_p(\mu)}$ と記すのが，既に本論文で黙って使ってきたが，標準的記法である．又 $L_p(I,\mathcal{L},\mathbb{P})$ も $\boldsymbol{L_p}$ と略記するのも，一般的記法であるし，元々初期に考え，呼び，記したところの Lebesgue 空間がこの L_p であった．或いは，1 次元集合上の 1 次元測度による Lebesgue 空間を L_p と記すことも多い．例えば単位円周 $\mathbb{T}$ 上の角測度による Lebesgue 空間を L_p とか時には $L_p(\mathbb{T})$ とか記すことも屡々である．特に $\Omega=\mathbb{N}$, $\Sigma=2^{\mathbb{N}}$, $\mu=\#$, 即ち $\mu(S):=\#S$ (S の個数，無限ならここでは ∞) にとった場合の $L_p(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}},\#)$ を $\boldsymbol{l_p}$ とかく．$f\in l_p$ は $\xi_n:=f(n)$ $(n\in\mathbb{N})$ で決める実数列 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と $1:1$ に対応し (4.3) で与える f の p ノルムを計算すると

$$\|f\|_p=\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}|\xi_n|^p\right)^{1/p}$$

となることがわかる．故に l_p は実数列 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ でその p ノルム

$$\|(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p:=\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}|\xi_n|^p\right)^{1/p}<\infty$$

6) ここで，そして本論文中ここ以降でも，$[-\infty,\infty]$ の 2 数 a, b に対し，$a\wedge b=\min\{a,b\}$, $a\vee b=\max\{a,b\}$ の束記号を用いる．

となるものゝ全体の作る数列空間，詳しくは数列 p 空間，と解しても良い．但し l_∞ は ∞ ノルム

$$\|(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n| < \infty$$

である有界数列 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の全体と解する．勿論，L_p $(0 < p \leqq \infty)$ も l_p $(0 < p \leqq \infty)$ のいずれも $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ の特例として縮約 Banach 空間である．

5．縮約 Banach 空間の型と余型． 縮約 Banach 空間 X の縮約ノルム $\|\cdot\|_X$ の添字 X を省いて暫くは $\|\cdot\|$ と略記する．X の型と余型と呼ぶ X の特性量を導入する為に X の有限個の元 $x_1, \cdots, x_n$ に対する 2 種の値を考える．第一は，$x_1, \cdots, x_n$ の絶対和と呼ぶものである．指数 $0 < p \leqq \infty$ に対し

$$\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{1/p} \quad (0 < p \leqq \infty) \tag{5.1}$$

を $x_1, \cdots, x_n$ の p 位の**絶対和**と呼ぶ．但し

$$\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^\infty\right)^{1/\infty} := \max_{1\leqq j\leqq n} \|x_j\| \tag{5.2}$$

と理解する．p 位の絶対和を $0 < p \leqq \infty$ の関数とみるとき，これが $(0, \infty]$ 上の連続減少関数であることをみる．簡単の為 $f(p) := \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{1/p}$ とおく．$0 < r < s < \infty$ とする．$0 < r/s < 1$ だから $\mathbb{R}$ 上の縮約三角不等式により

$$f(s)^r = \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^s\right)^{r/s} \leqq \sum_{j=1}^n \|x_j\|^{s(r/s)} = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^r = f(r)^r$$

であるから，$f(r) \geqq f(s)$ $(0 < r < s < \infty)$ となり，$p \mapsto f(p)$ が $(0, \infty)$ 上の連続減少関数である．従って $f(+0) = \lim_{p\downarrow 0} f(p)$ も $f(\infty - 0) = \lim_{p\uparrow\infty} f(p)$ も確かに存在することが分かる．よってこれ等の値 $f(+0)$ と $f(\infty - 0)$ を求めよう．先ず $f(+0)$ を求める．$x_1, \cdots, x_n$ の内 0 でないものの個数 $\#\{1 \leqq j \leqq n : x_j \neq 0\}$ の値により $f(+0)$ は三通りの値をとる．非自明の場合，即ち，最も普通の場合である $\#\{1 \leqq j \leqq n : x_j \neq 0\} =: m \geqq 2$ の場合には，$f(r)^r \to m$ $(r \downarrow 0)$ だから $f(r)/m^{1/r} \to 1$ $(r \downarrow 0)$ となり，$f(r) \to \infty$ $(r \downarrow 0)$ である．即ちこの場合には $f(+0) = \infty$ である．$\#\{1 \leqq j \leqq n : x_j \neq 0\} = 1$ のとき，0 でないものを x_k とすれば，$(0, \infty)$ 上 $f(p) \equiv \|x_k\|$ だから無論 $f(+0) = \|x_k\|$ である．$\#\{1 \leqq j \leqq n : x_j \neq 0\} = 0$ なら $f(p) \equiv 0$ より $f(+0) = 0$ となる．よって

$$\lim_{p\downarrow 0}\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{1/p} = \begin{cases} \infty & (\#\{1 \leqq j \leqq n : x_j \neq 0\} \geqq 2); \\ \|x_k\| & (\#\{1 \leqq j \leqq n : x_j \neq 0\} = 1, x_k \neq 0); \\ 0 & (\#\{1 \leqq j \leqq n : x_j \neq 0\} = 0). \end{cases} \tag{5.3}$$

次に $f(\infty - 0)$ を考える．$f(\infty) = \max_{1\leqq j\leqq n} \|x_j\| = \|x_k\| > 0$ $(1 \leqq k \leqq j)$ としよう．$0 < p < \infty$ のとき

$$\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{1/p} = \|x_k\| \left(1 + \sum_{j\neq k}^{1,\cdots,n} \|x_j\|^p / \|x_k\|^p\right)^{1/p}$$

に於いて $\|x_j\|^p / \|x_k\|^p \leqq 1$ $(1 \leqq j \leqq n)$ であるから

$$\|x_k\| \leqq \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{1/p} \leqq \|x_k\| \cdot n^{1/p}$$

となる．よって $f(\infty - 0) = \|x_k\|$ だから

$$\lim_{p\uparrow\infty}\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{1/p} = \max_{1\leqq j\leqq n} \|x_j\| = \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^\infty\right)^{1/\infty} \tag{5.4}$$

となる．これは $f(p)$ の $p = \infty$ に於いての連続性も示している．これは $\max_{1\leqq j\leqq n} \|x_j\| > 0$ として導いたが，しかし $\max_{1\leqq j\leqq n} \|x_j\| = 0$ のときも，同様に有効である．こうして $f(p)$ は (5.3) で示した $f(+0)$ より減少し (5.4) で示す $f(\infty)$

に終る $(0,\infty]$ 上の連続減少関数である (図 5 参照．図 5 の $f(+0)=\infty$ は非自明の場合；自明の場合はグラフは一定値関数 $f(p)\equiv\max_{1\leqq j\leqq n}\|x_j\|$)．

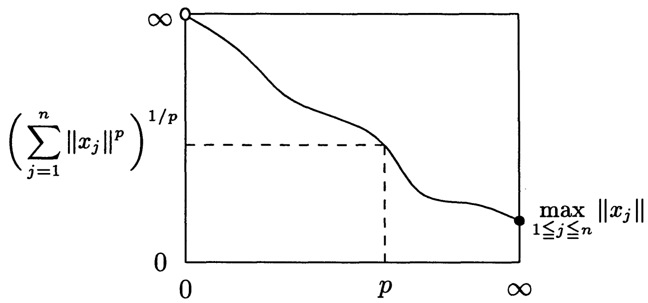

図 5

縮約 Banach 空間 X の任意の有限個の元 $x_1,\cdots,x_n$ に対する今一つの値を与える．このときは更に今一つ $0<p\leqq\infty$ である指数 p をとる．そのとき

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n}\rho_j x_j\right\|^p\right)^{1/p}\quad(0<p\leqq\infty)\tag{5.5}$$

を $x_1,\cdots,x_n$ の p 位の **random 平均**と呼ぶ．但し

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n}\rho_j x_j\right\|^\infty\right)^{1/\infty}:=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in I}\left\|\sum_{j=1}^{n}\rho_j(t)x_j\right\|\tag{5.6}$$

と理解する．p 位の random 平均 $\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n}\rho_j x_j\right\|^p\right)^{1/p}$ を $0<p\leqq\infty$ 上の p の関数とみるとき，これが $(0,\infty]$ 上の連続増加関数であることを示そう．$0<r<s<\infty$ とすると $s/r>1$ 故 Hölder の不等式によれば

$$\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\rho_j x_j\right\|^r\cdot 1\right)\leqq\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n}\rho_j x_j\right\|^{r(s/r)}\right)^{r/s}\cdot\left(\mathbb{E}1^{(s/r)^*}\right)^{1/(s/r)^*}=\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n}\rho_j x_j\right\|^s\right)^{r/s}$$

となる．ここに $(s/r)^*$ は s/r の共軛指数, 即ち $1/(s/r)^*+1/(s/r)=1$ となるものとする．よって

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n}\rho_j x_j\right\|^r\right)^{1/r}\leqq\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n}\rho_j x_j\right\|^s\right)^{1/s}\quad(0<r<s<\infty)$$

となり，確かに $g(p):=\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n}\rho_j x_j\right\|^p\right)^{1/p}$ は $(0,\infty)$ 上連続増加関数であるよって少なくとも極限 $g(+0)=\lim_{p\downarrow 0}g(p)$ も $g(\infty-0)=\lim_{p\uparrow\infty}g(p)$ も共に存在する訳であるが，その値を出来るだけ具体的に求めたい．兎に角 I 上の t の関数 $\left\|\sum_{j=1}^{n}\rho_j(t)x_j\right\|$ は I 上可測関数で，縮約三角不等式により

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\rho_j(t)x_j\right\|=\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\rho_j(t)x_j\right\|^{\sigma_X}\right)^{1/\sigma_X}\leqq\left(\sum_{j=1}^{n}\|\rho_j(t)x_j\|^{\sigma_X}\right)^{1/\sigma_X}=\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^{\sigma_X}\right)^{1/\sigma_X}$$

であるから $\left\|\sum_{j=1}^{n}\rho_j(t)x_j\right\|$ は I 上有界であることに注意しよう．$g(\infty-0)$ の値を求めることは，それが $g(\infty-0)=g(\infty)$ を満たすことを確認する為に真に必要であるが，$g(+0)$ についてはそうでない．が，とにかく先ず $g(+0)$ を求めたい．しかし以下の "計算" でわかる様に正確にこの作業を遂行するには困難がある．実際 $g(p)$ の使用に当たり $g(+0)$ の値は全然必要ないから，初めから触れないのが一番であろうが，$f(+0)$ との対比で，$g(+0)$ も知れたら知りたい．そこで大体 $g(+0)$ はどんなものであるかの感触を得る目的で，以下の "計算" と "結果"(5.7) を記すが，それらの正当性は全く保証の外である．第一，$\left\|\sum_{j=1}^{n}\rho_j(t)x_j\right\|=0$ は，無論 I の 2 進有理点では起こるが，これが I の測度正の部分集合上起こらぬと言う

仮定なしでは，以下の“計算”は意味をなさぬ．それでも正確な作業遂行の用ある時の指針の役割を果たすかもしれないと言う期待で，以下 (5.7) 迄の塵を捨てずに置く．そて極限算法の 0/0 型不定形についての L'Hospital の法則によれば

$$\begin{aligned}\lim_{p\downarrow 0}\log\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|^p\right)^{1/p} &= \lim_{p\downarrow 0}\frac{\log\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|^p}{p} = \lim_{p\downarrow 0}\frac{\frac{d}{dp}\log\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|^p}{\frac{d}{dp}p}\\ &= \lim_{p\downarrow 0}\frac{\frac{d}{dp}\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|^p}{\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|^p} = \lim_{p\downarrow 0}\frac{\mathbb{E}\,\frac{d}{dp}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|^p}{\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|^p}\\ &= \lim_{p\downarrow 0}\frac{\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|^p\cdot\log\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|\right)}{\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|^p} = \mathbb{E}\log\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|\end{aligned}$$

であるから

$$\lim_{p\downarrow 0}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|^p\right)^{1/p} = \exp\left(\mathbb{E}\,\log\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|\right) \tag{5.7}$$

で $g(+0)$ が求まったことにしておく．これは今の所は上述の如く本質的な使い道どころか全然必要ないのであるのが幸であるが，次の $g(\infty-0)$ は大切である．上述の通り $\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j(t)x_j\right\|$ は確率空間 $(I,\mathcal{L},\mathbb{P})$ 上の有界可測関数であったから，良く識られた様に

$$\lim_{p\uparrow\infty}\left\|\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|\right\|_p = \left\|\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|\right\|_\infty$$

となるので

$$\begin{aligned}\lim_{p\uparrow\infty} g(p) = \lim_{p\uparrow\infty}\left(\int_I\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j(t)x_j\right\|^p dt\right)^{1/p} &= \lim_{p\uparrow\infty}\left\|\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j(t)x_j\right\|\right\|_p\\ &= \left\|\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|\right\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in I}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j(t)x_j\right\| = g(\infty)\end{aligned}$$

であるから

$$\lim_{p\uparrow\infty}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|^p\right)^{1/p} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in I}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j(t)x_j\right\| \tag{5.8}$$

が出る．よって $g(p)$ は $g(+0)$ を $[0,\infty)$ より増加して行き，$g(\infty-0)=g(\infty)\left(\leqq\left(\sum_{j=1}^n\|x_j\|^{\sigma X}\right)^{1/\sigma X}\right)$ に終わる $(0,\infty]$ 上の連続増加関数であることがわかる (図 6 参照).

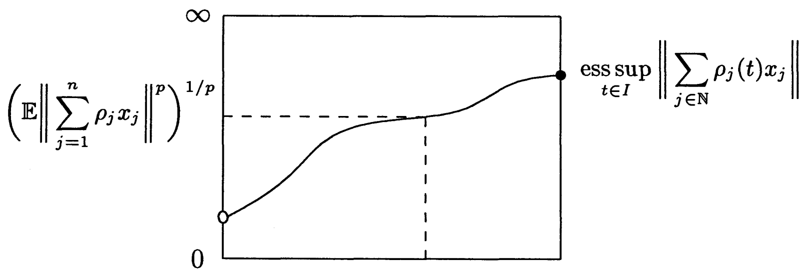

図 6

縮約 Banach 空間の型と余型と称する不変量を導入する．X に対して或指数 $0<p\leqq\infty$ と或定数 $C>0$ が定まって，X 内のすべての有限点列 $(x_j)_{1\leqq j\leqq n}$ に対し

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|^p\right)^{1/p} \leqq C\left(\sum_{j=1}^n\|x_j\|^p\right)^{1/p} \tag{5.9}$$

が成立するものとする．その時 p を X の一つの**型 (type)** と言い，X の型の全体の集合を $\mathrm{T}(X)$ と記して，X の**型集合**と言う．T は type の頭文字 t を示唆するギリシャ大文字タウである．次に X に対して或指数 $0<p\leqq\infty$ と或定数 $C>0$ が定まって，X 内のすべての有限点列 $(x_j)_{1\leqq j\leqq n}$ に対し

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n}\rho_j x_j\right\|^p\right)^{1/p}\geqq C\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{1/p} \tag{5.10}$$

が成立するものとする．その時 p を X の一つの**余型 (cotype)** と言い，X の余型の全体の集合を $\Gamma(X)$ と記して，X の**余型集合**と言う．Γ は cotype の頭文字 c を示唆するギリシャ大文字ガンマである．以下順次縮約 Banach 空間 X の型と余型に関する基本的基礎的初等的性質を根底事項 I–III の 3 項目にまとめて述べる．

根底事項 I. Xの型集合$\mathrm{T}(X)$及び余型集合$\Gamma(X)$は共に 1 次元区間であって，夫々次の条件を満たす：

$$(0,\sigma_X]\subset\mathrm{T}(X)\subset(0,2]; \tag{5.11}$$

$$[\infty,\infty]\subset\Gamma(X)\subset[2,\infty]; \tag{5.12}$$

証明：絶対和 $\left(\sum_{j=1}^n\|x_j\|^p\right)^{1/p}$ は $p\in(0,\infty]$ の減少関数, random 平均 $\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n\rho_jx_j\right\|^p\right)^{1/p}$ は $p\in[0,\infty]$ の増加関数であるから，定義不等式 (5.9) と (5.10) と合せて，$\mathrm{T}(X)$ 及び $\Gamma(X)$ の区間であることがわかる，即ち $p\in\mathrm{T}(X)$ で $0<q<p$ ならば $q\in\mathrm{T}(X)$; $p\in\Gamma(X)$ で $p<q\leqq\infty$ ならば $q\in\Gamma(X)$, 縮約三角不等式により

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n}\rho_jx_j\right\|^{\sigma_X}\right)^{1/\sigma_X}\leqq\left(\mathbb{E}\sum_{j=1}^{n}\|\rho_jx_j\|^{\sigma_X}\right)^{1/\sigma_X}=\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^{\sigma_X}\right)^{1/\sigma_X}=\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^{\sigma_X}\right)^{1/\sigma_X}$$

となるが，これは $\sigma_X\in\mathrm{T}(X)$ を示す．$\mathrm{T}(X)$ は区間であること等により $(0,\sigma_X]\subset\mathrm{T}(X)$ である．次に $\mathrm{T}(X)\subset(0,2]$ を示す．もし $\mathrm{T}(X)\not\subset(0,2]$ なら $\mathrm{T}(X)$ は区間故 $2<p<\infty$ である $p\in\mathrm{T}(X)$ がある．$x\neq0$ である $x\in X$ をとり，(5.9) を $x_1=\cdots x_n=x$ として考え両辺を $\|x\|$ で割ると

$$\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\rho_j\right|^p\right)^{1/p}\leqq Cn^{1/p} \tag{5.13}$$

となる．$(\rho_j)_{j=1}^n$ の正規直交正により

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\rho_j\right|^2=\mathbb{E}\sum_{i,j}^{1,\cdots,n}\rho_i\rho_j=\sum_{i,j}^{1,\cdots,n}\mathbb{E}(\rho_i\cdot\rho_j)=\sum_{i=1}^{n}1=n$$

である．$2<p<\infty$ の共軛指数 $p^*<2$ だから，Hölder の不等式及び Khintchine の不等式により

$$\begin{aligned}n=\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\rho_j\right|^2&=\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\rho_j\right|\cdot\left|\sum_{j=1}^{n}\rho_j\right|\leqq\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\rho_j\right|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\rho_j\right|^{p^*}\right)^{1/p^*}\\&\leqq\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\rho_j\right|^p\right)^{1/p}\cdot B_{p^*}\left(\sum_{j=1}^{n}1^2\right)^{1/2}=B_{p^*}n^{1/2}\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\rho_j\right|^p\right)^{1/p}\end{aligned}$$

となる．これより

$$B_{p^*}^{-1}n^{1/2}\leqq\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n}\rho_j\right|^p\right)^{1/p}$$

が結論出来る．これと (5.13) と合わせると

$$B_{p^*}^{-1}n^{1/2}\leqq Cn^{1/p}$$

となる．これがすべての $n\in\mathbb{N}$ で成り立つから $1/2\leqq1/p$, 又は $p\leqq2$ となり，最初の仮定 $2<p<\infty$ に反する．以上により $\mathrm{T}(X)\subset(0,2]$ でなければならず (5.11) が示された．次に $[\infty,\infty]\subset\Gamma(X)$, 即ち $\infty\in\Gamma(X)$ をみる．

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^\infty\right)^{1/\infty}=\max_{1\leqq j\leqq n}\|x_j\|=\|x_k\|\quad(1\leqq k\leqq n) \tag{5.14}$$

であるとして，

$$A_\pm := (\rho_k = 1) \cap \left(\bigcap_{j \neq k}^{1,\cdots,n} (\rho_j = \pm 1) \right) \qquad (\text{複号同順})$$

とおく．$\{\rho_1, \cdots, \rho_n\}$ は独立であったから

$$\mathbb{P}(A_\pm) = \mathbb{P}(\rho_k = 1) \cdot \mathbb{P} \prod_{j \neq k}^{1,\cdots,n} (\rho_j = \pm 1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^n > 0 \qquad (\text{複号同順})$$

である．ゆえに

$$\sup_{t \in I} \left\| \sum_{j=1}^n \rho_j(t) x_j \right\| \geqq \sup_{t \in A_\pm} \left\| \sum_{j=1}^n \rho_j(t) x_j \right\| = \left\| x_k \pm \sum_{j \neq k}^{1,\cdots,n} x_j \right\| \qquad (\text{複号同順})$$

となる．この $+$ と $-$ に応ずる二不等式を辺々 σ_X 乗して加え合わせると

$$\begin{aligned} 2 \sup_{t \in I} \left\| \sum_{j=1}^n \rho_j(t) x_j \right\|^{\sigma_X} &\geqq \left\| x_k + \sum_{j \neq k}^{1,\cdots,n} x_j \right\|^{\sigma_X} + \left\| x_k - \sum_{j \neq k}^{1,\cdots,n} x_j \right\|^{\sigma_X} \\ &\geqq \left\| \left(x_k + \sum_{j \neq k}^{1,\cdots,n} x_j \right) + \left(x_k - \sum_{j \neq k}^{1,\cdots,n} x_j \right) \right\|^{\sigma_X} = \|2x_k\|^{\sigma_X} = 2^{\sigma_X} \|x_k\|^{\sigma_X} \end{aligned}$$

となる．従って

$$2 \left(\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n \rho_j x_j \right\|^\infty \right)^{1/\infty} \right)^{\sigma_X} = 2 \left(\sup_{t \in I} \left\| \sum_{j=1}^n \rho_j(t) x_j \right\| \right)^{\sigma_X} \geqq 2^{\sigma_X} \|x_k\|^{\sigma_X}$$

であるから

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n \rho_j x_j \right\|^\infty \right)^{1/\infty} \geqq 2^{1 - 1/\sigma_X} \|x_k\| \tag{5.15}$$

となり，(5.14) と (5.15) 合わせて

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n \rho_j x_j \right\|^\infty \right)^{1/\infty} \geqq 2^{1 - 1/\sigma_X} \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^\infty \right)^{1/\infty}$$

となる．これは $\infty \in \Gamma(X)$ 以外の何者でもない．最後に $\Gamma(X) \subset [2, \infty]$ をみたい．$\Gamma(X)$ は区間で $\infty \in \Gamma(X)$ 故，もし $\Gamma(X) \not\subset [2, \infty]$ なら $0 < p < 2$ である $p \in \Gamma(X)$ があることになる．即ちこの p で (5.10) が成り立つ．$x \neq 0$ となる $x \in X$ をとり，$x_1 = \cdots x_n = x$ にとるなら，これより

$$\left(\mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^n \rho_j \right|^p \right)^{1/p} \geqq C n^{1/p}$$

となる．Khintchine の不等式を適用すると

$$C n^{1/p} \leqq \left(\mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^n \rho_j \right|^p \right)^{1/p} \leqq B_p \left(\sum_{j=1}^n \rho_j^2 \right)^{1/2} = B_p n^{1/2},$$

即ち $C n^{1/p} \leqq B_p n^{1/2}$ がすべての n で成り立つから $1/p \leqq 1/2$, つまり $p \geqq 2$ でなければならぬ．これは背理法の仮定 $0 < p < 2$ に反する．故に $\Gamma(X) \subset [2, \infty]$ となり (5.12) も導かれる． □

この様に $\mathrm{T}(X)$ も $\Gamma(X)$ も区間であるから，$\mathrm{T}(X)$ を又 X の**型区間 (type interval)**，$\Gamma(X)$ も又**余型区間 (cotype interval)** と呼ぶこともある (図 7 参照)．$\mathrm{T}(X)$ に最大値はあるか，又 $\Gamma(X)$ に最小値があるか否かは現在の所筆者等にはわからないが，きっと大変に重要な問題に違いない．Lebesgue 空間を初め代表的な多くの縮約 Banach 空間の具体例にはこれ等がある．むしろ無い様な例を見つけろと言う具合に設問すべきであろう．

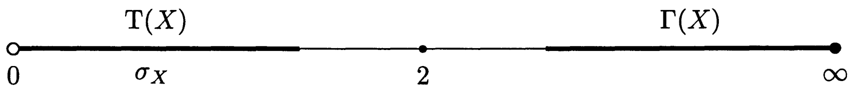

図7

さてそこで $\mathrm{T}(X)$ が最大値をもてばそれを $\tau(X)$ と記し，即ち

$$\tau(X) = \max \mathrm{T}(X)$$

とし，これを X の**最大型 (maximal type)**, 又 $\Gamma(X)$ が最小値をもてばそれを $\gamma(X)$ と記し，即ち

$$\gamma(X) = \min \Gamma(X)$$

とし，これを X の**最小余型 (minimal cotype)** と呼ぶ．時にはこれらを又 **optimal type** 及び **optimal cotype** 又は optimal な意味での type や cotype であると言う．$\tau(X)$ は type の頭文字 t に対応するギリシャ小文字 τ を，又 $\gamma(X)$ は cotype の頭文字 c に対応するギリシャ小文字 γ を上述の由来を示唆して使う．従ってこれらがある場合なら

(5.16) $$\mathrm{T}(X) = (0, \tau(X)], \quad \Gamma(X) = [\gamma(X), \infty]$$

であり又

(5.17) $$0 < \sigma_X \leqq \tau(X) \leqq 2 \leqq \gamma(X) \leqq \infty$$

である．(図 8 参照：型，余型共に optimal の場合)．

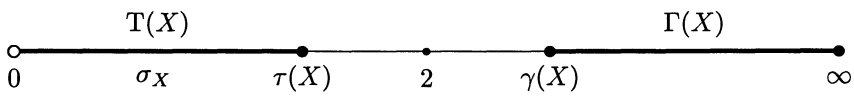

図8

ここで位相線形空間 X から位相線形空間 Y への線形写像 $T: X \to Y$ を考える．ある $x_0 \in X$ に於いて $x \to x_0$ のとき $Tx \to Tx_0$ となるならば T は x_0 で連続であると言う．どの $x_0 \in X$ でも T が連続なら T は X で連続と言う．T の線形性により，T が X 上連続である必要十分条件は T が $0 \in X$ で連続なことである，即ち $x \to 0$ なら $Tx \to 0$．特に，X も Y も縮約 Banach 空間とするとき，線形作用素 $T: X \to Y$ が，或る定数 $C > 0$ があってすべての $x \in X$ に対して

(5.18) $$\|Tx\|_Y \leqq C\,\|x\|_X$$

を満たすとき，T は**有界**であると言う．このとき $x \to 0$ なら $Tx \to 0$ 故 T は連続となるが，逆に $T: X \to Y$ を連続とすると T は有界となる，即ち (5.18) が成立する．何者，もし (5.18) の様な $C > 0$ がみつからなければ，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\|Tx_n\|_Y \geqq n\,\|x_n\|_X$$

となる $x_n \in X, x_n \neq 0$ がみつかる．縮約ノルム $\|\cdot\|_Y$ の斉次性により，$x_n' := \big(1/n\,\|x_n\|_X\big)x_n$ とおけば

$$\|Tx_n'\|_Y \geqq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

である．$\|x_n'\|_X = 1/n \to 0\ (n \to \infty)$, つまり $x_n' \to 0\ (n \to \infty)$ 故，T の連続性より $\|Tx_n'\|_Y \to 0\ (n \to \infty)$ となり上述不等式に矛盾する．こうして $T: X \to Y$ の連続性と有界性の同値性が示された．

位相線形空間 X と Y が**同型** (isomorphic) であるとは全単射作用素 $T: X \to Y$ で線形同型かつ両連続なものがとれることであった．記号では $\boldsymbol{X \approx Y}$ と記す．特に X も Y も縮約 Banach 空間の場合，$X \approx Y$ となる条件は全単射作用素 $T: X \to Y$ で，線形同型かつある正数 $C > 0$ があって，すべての $x \in X$ に対し

(5.19) $$C^{-1}\,\|x\|_X \leqq \|Tx\|_Y \leqq C\,\|x\|_X$$

となることと言える．位相線形空間 X と Y があるとき，X が Y に**埋蔵** (embed) される，記号で $X \hookrightarrow Y$，とは，$X \approx Z$ となる位相線形空間 Z が Y の部分空間となることである．常に，部分空間は閉線形部分空間の意味とする．勿論 $X \subset Y$ (部分空間) なら $X \hookrightarrow Y$ である．$X \hookrightarrow Y$ かつ $Y \hookrightarrow X$ のとき，X と Y は同値，記号 $X \sim Y$, と言う．$X \approx Y$ なら $X \sim Y$ だが，逆は必ずしも眞ではない．

根底事項 II. X 及び Y は縮約 Banach 空間とする．そのとき $X \hookrightarrow Y$, 特に $X \subset Y$, 即ち X は Y の部分空間，であると

$$\mathbf{T}(X) \supset \mathbf{T}(Y), \quad \boldsymbol{\Gamma}(X) \supset \boldsymbol{\Gamma}(Y) \tag{5.20}$$

となる．更に $X \sim Y$, 特に $X \approx Y$, であると

$$\mathbf{T}(X) = \mathbf{T}(Y), \quad \boldsymbol{\Gamma}(X) = \boldsymbol{\Gamma}(Y) \tag{5.21}$$

である．よって，型及び余型，又 optimal な意味での型や余型は縮約 Banach 空間論的不変量である．

証明 : $X \approx Y$ のとき (5.21), $X \subset Y$ (即ち X は Y の部分空間) のとき (5.20) が成り立つことを確認すれば，上記中残りの性質は即座に従う．さて先ず $X \approx Y$ とし，$T : X \to Y$ をその同型写像とする．$p \in \mathrm{T}(X)$ を任意にとり，任意の $n \in \mathbb{N}$, 任意の $(y_j)_{j=1}^n \subset Y$ に対し，$x_j = T^{-1}y_j \in X$ $(j = 1, \cdots, n)$ とおくと，$(x_j)_{j=1}^n \subset X$ に対し (5.9) が成り立つから

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_i T^{-1}y_j\right\|_X^p\right)^{1/p} \leqq C\left(\sum_{j=1}^n \left\|T^{-1}y_j\right\|_X^p\right)^{1/p}$$

である．同型条件 (5.19) によりある定数 $C_1 > 0$ があって，すべての $y \in Y$ に対して

$$C_1^{-1}\|y\|_Y \leqq \left\|T^{-1}y\right\|_X \leqq C_1\|y\|_Y$$

となるから，$T^{-1}\sum_{j=1}^n \rho_j y_j = \sum_{j=1}^n \rho_i T^{-1}y_j$ により上記陳列の型不等式から

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j y_j\right\|_Y^p\right)^{1/p} \leqq CC_1^2\left(\sum_{j=1}^n \left\|y_j\right\|_Y^p\right)^{1/p}$$

が出る．これは $p \in \mathrm{T}(Y)$ であることを示す．故に $\mathrm{T}(X) \subset \mathrm{T}(Y)$ であり，X と Y の役割を取り換えて同じ議論をすれば $\mathrm{T}(Y) \subset \mathrm{T}(X)$ が出て，結局 $X \approx Y$ なら $\mathrm{T}(X) = \mathrm{T}(Y)$ がわかる．$X \approx Y$ の時の $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$ も $\mathrm{T}(X) = \mathrm{T}(Y)$ と同様にして示される．こうして (5.21) が確認出来た．次に X を Y の部分空間とする : $X \subset Y$．$p \in \mathrm{T}(Y)$ を任意にとる．任意の $n \in \mathbb{N}$, 任意の $(x_j)_{j=1}^n \subset Y$ に対して (5.9) が成り立って居るが，特に $(x_j)_{j=1}^n \subset X$ に限定しても勿論のこと同様に成り立つので，$p \in \mathrm{T}(X)$ でもある．故に $\mathrm{T}(X) \supset \mathrm{T}(Y)$ となる．$\Gamma(X) \supset \Gamma(Y)$ についても同様である．こうして (5.20) の確認も終了する．$\square$

縮約 Banach 空間 X が**準 Hilbert 空間**であるとは，X に対してある純正の Hilbert 空間 Y が存在して $X \approx Y$ となることである．X が有限次元，$\dim X = n < \infty$, ならば，$X \approx \mathbb{R}^n$ であり，$\mathbb{R}^n$ は Hilbert 空間であるから，有限次元縮約 Banach 空間はすべて準 Hilbert 空間である．

根底事項 III. 縮約 Banach 空間 X が準 Hilbert 空間, 特に有限次元縮約 Banach 空間であるならば

$$\mathbf{T}(X) = (0, 2], \quad \boldsymbol{\Gamma}(X) = [2, \infty]. \tag{5.22}$$

証明 : Y を $X \approx Y$ である様な Hilbert 空間とする．根底事項 II によれば $\mathrm{T}(X) = \mathrm{T}(Y)$ かつ $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$ であるから，X が Hilbert 空間の場合として (5.22) を示せばよい．X が Hilbert 空間であることは，X のノルム $\|\cdot\|_X$ が一般中線定理 (即ち，一般平行四辺形法則) をみたすことで特徴付けられる，即ち，任意有限列 $(x_j)_{j=1}^n \subset X$ に対して

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\right\|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^n \left\|x_j\right\|^2\right)^{1/2}$$

が成り立つことである．これは $2 \in \mathrm{T}(X)$ 及び $2 \in \Gamma(X)$ を意味するので，根底事項 I の (5.11),(5.12) により (5.22) が得られる．$\square$

6. Lebesgue 空間の構造不等式. Lebesgue 空間 $L_p(\mu) := L_p(\Omega,\Sigma,\mu)$ $(0 < p \leqq \infty)$ の基礎空間としての測度空間 (Ω,Σ,μ) については，常に，**σ有限**：増加集合列 $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ で，$0 \leqq \mu(\Omega_j) < \infty$ $(j \in \mathbb{N})$ かつ $\Omega = \cup_{j\in\mathbb{N}}\Omega_j$ となるものがある，と，**非自明**：集合列 $(E_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ で，$E_i \cap E_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ かつ $0 < \mu(E_j) < \infty$ $(j \in \mathbb{N})$ となるものがとれる，の二条件を仮定する．これら二条件の効果について述べる．

(Ω,Σ,μ) を σ 有限とすると，Ω 上 Σ 可測関数 φ で，Ω 上 $\varphi > 0$ で，更に

$$\int_\Omega \varphi(\omega)\,d\mu(\omega) = 1$$

となるものを構成することが出来る．そこで $d\nu(\omega) = \varphi(\omega)d\mu(\omega)$ により Ω 上の測度 ν を定めると (Ω,Σ,ν) は確率測度空間となる．指数 $0 < p < \infty$ に対し，作用素 $V_p : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ を

$$V_p f := f\cdot\varphi^{-1/p} \quad (f \in L_p(\mu))$$

で定めると $V_p : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ は等距離線形同型作用素となる，即ち $\|V_p f\|_{L_p(\nu)} = \|f\|_{L_p(\mu)}$ $(f \in L_p(\mu))$ となる．又 $p = \infty$ に対し，$V_\infty f = f$ $(f \in L_\infty(\mu))$ で定めた作用素 $V_\infty : L_\infty(\mu) \to L_\infty(\nu)$ も又等距離線形同型作用素である，即ち $\|V_\infty f\|_{L_\infty(\nu)} = \|f\|_{L_\infty(\mu)}$ $(f \in L_\infty(\mu))$ である．従って $L_p(\mu)$ を研究するに当たり，その基礎測度空間 (Ω,Σ,μ) の測度 μ のみを $\varphi\,d\mu = d\nu$ となる測度 ν で置き換えた確率測度空間 (Ω,Σ,ν) 上の $L_p(\nu)$ をとるとき

$$L_p(\mu) \approx L_p(\nu) \quad (\text{特に，等距離同型})$$

と出来る．即ち $L_p(\mu)$ と縮約 Banach 空間として等距離同型な，即ち同一構造を持つ $L_p(\nu)$ $(\nu(\Omega) = 1)$ が取れる．この故に以下必要なら $\mu(\Omega) = 1$ と仮定することが許される．これが (Ω,Σ,μ) が σ 有限であることの効果の一つである．

次に (Ω,Σ,μ) の非自明性の効果 (帰結) を 2 点考える．最初に，すべての指数 $0 < p \leqq \infty$ に対して，次の意味で $L_p(\mu)$ は十分多くの関数を持つ：

$$\dim L_p(\mu) = \infty \quad (0 < p \leqq \infty). \tag{6.1}$$

(Ω,Σ,μ) が非自明だから Σ の互いに素な集合列 $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ で $0 < \mu(E_j) < \infty$ $(j \in \mathbb{N})$ となるものが取れる．$S \subset \Omega$ の特性関数を χ_S と記す，即ち χ_S は Ω 上の関数で $\chi_S|S = 1$, $\chi_S|\Omega\backslash S = 0$ となるものであり，$S \in \Sigma$ なら χ_S は Σ 可測である．そこで各 $0 < p \leqq \infty$ に対して

$$e_j := \mu(E_j)^{-1/p}\chi_{E_j} \quad (j \in \mathbb{N})$$

とおく．$p = \infty$ なら $e_j = \chi_{E_j}$ と解せられる．明らかに $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ の任意の有限個の元からなる部分族は 1 次独立だから (6.1) が結論出来る．今一つ，すべての指数 $0 < p < \infty$ に対して

$$l_p \hookrightarrow L_p(\mu) \quad (0 < p \leqq \infty) \tag{6.2}$$

となる．事実，$(a_1,\cdots,a_n,\cdots) \in l_p$ に対して $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e_j \in L_p(\mu)$ を対応させるならば，

$$Z := \left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e_j : (a_1,\cdots,a_n,\cdots) \in l_p\right\}$$

は $L_p(\mu)$ の閉部分空間で，上の対応で $l_p \approx Z$ (特に等距離同型) であるから (6.2) が結論出来る．逆に (6.1),(6.2) の各々から (Ω,Σ,μ) の非自明性が結論出来る．即ちこれら三者が互いに同値となるが，当面必要ないので，この部分の証明は略す．

本節の主目標に進む．本 6 節では Lebesgue 空間 $L_p(\mu)$ $(0 < p < \infty)$ の構造解析の基礎的部分を支える，構造不等式と称するものを証明する．Lebesgue 空間の基本不等式とも呼ばれる．再度強調するが，これは指数 $0 < p < \infty$ に限定するもので，$p = \infty$ については，何等かの別の装置が必要である．しかし全体の大半を占める $0 < p < \infty$ の場合に於いては非常に強力な仕掛けで，Khintchine, Orlicz, Nordlander の三者の貢献の果実である．但し多くの文献では構造不等式は $1 \leqq p < \infty$ の場合に限定されて論ぜられるのが普通の様であるが，本論文では $0 < p < 1$ の場合を含めても大丈夫であることを特に強調したい．

指数 $0 < p < \infty$ のみに依存する定数 $A_p > 0, B_p > 0$ があって，すべての $n \in \mathbb{N}$ とすべての有限関数列 $(f_j)_{1\leqq j\leqq n} \subset L_p(\mu)$ に対して

$$\boldsymbol{A_p}\left(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L_p(\mu)}^{p\vee 2}\right)^{1/p\vee 2} \leqq \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n} \rho_j f_j\right\|_{L_p(\mu)}^{p}\right)^{1/p} \leqq \boldsymbol{B_p}\left(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L_p(\mu)}^{p\wedge 2}\right)^{1/p\wedge 2} \tag{6.3}$$

が成り立つ．但し，$p \wedge 2 = \min\{p, 2\}$, $p \vee 2 = \max\{p, 2\}$ であったことを想起する．この不等式 (6.3) を Lebesgue 空間 $L_p(\mu)(0 < p < \infty)$ の**構造不等式**と言う．以下この証明を行うが，記号の簡略化の為，$f \in L_p(\mu)$ の p ノルム $\|f\|_{L_p(\mu)}$ を $\|f\|_p$ と略記する．ここだけの略記号と言うよりは，一般に $f \in L_p(\mu)$ の p ノルムを $\|f\|_p$ で示すのは，広く採用されている記号でもある．(6.3) の証明は 2 段階に分けて行われる．まず最初

$$A_p \left\| \left(\sum_{j=1}^n f_j^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leqq \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n \rho_j f_j \right\|_p^p \right)^{1/p} \leqq B_p \left\| \left(\sum_{j=1}^n f_j^2 \right)^{1/2} \right\|_p \tag{6.4}$$

を導く．これは Khintchine の不等式 (3 節参照) から本質的には進んでおらぬ所で，従って勿論 (6.4) は Khintchine の業績と言ってよい．そして更に (6.4) の左辺又は右辺の同一量を上下から評価する不等式

$$\left(\sum_{j=1}^n \|f_j\|_p^{p\vee 2} \right)^{1/p\vee 2} \leqq \left\| \left(\sum_{j=1}^n f_j^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leqq \left(\sum_{j=1}^n \|f_j\|_p^{p\wedge 2} \right)^{1/p\wedge 2} \tag{6.5}$$

が出る．(6.4) と (6.5) を合わせるだけで (6.3) が出ることは自明であろう．(6.5) の左側の不等式 (第 1 の不等式) は本質的には Orlicz [15,16] の業績であり，(6.5) の右側の不等式 (第 2 の不等式) は Nordlander[14] の業績である．そこで以下 (6.4) を証明し，次いで (6.5) の左側の証明，そして最後に (6.5) の右側の証明を行ってすべてが終わると言うプログラムに従う．

最初 **(6.4) を示す**に当り，今一度 Khintchine の不等式をここに再掲しよう：指数 $0 < p < \infty$ のみで定まる定数 $A_p > 0$, $B_p > 0$ があって，すべての $n \in \mathbb{N}$ と有限数列 $(a_j)_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$ に対して

$$A_p \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2 \right)^{1/2} \leqq \left(\mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^n \rho_j a_j \right|^p \right)^{1/p} \leqq B_p \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2 \right)^{1/2}$$

が成り立つ．ここで現れる定数 A_p, B_p が (6.3) の A_p, B_p と同一のものである．さて (6.4) の証明を始める．任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $(f_j)_{j=1}^n \subset L_p(\mu)$ が与えられたとする．任意の $\omega \in \Omega$ をとり，$(f_j(\omega))_{j=1}^n$ に対し Khintchine の不等式を適用するならば

$$A_p \left(\sum_{j=1}^n f_j(\omega)^2 \right)^{1/2} \leqq \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n \rho_j(t) f_j(\omega) \right|^p dt \right)^{1/p} \leqq B_p \left(\sum_{j=1}^n f_j(\omega)^2 \right)^{1/2}$$

が得られる．全体を p 乗すると

$$A_p^p \left(\sum_{j=1}^n f_j(\omega)^2 \right)^{p/2} \leqq \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n \rho_j(t) f_j(\omega) \right|^p dt \leqq B_p^p \left(\sum_{j=1}^n f_j(\omega)^2 \right)^{p/2}$$

となる．この不等式の各辺を Ω 上 μ で積分する．即ち

$$A_p^p \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n f_j^2 \right)^{p/2} d\mu \leqq \int_\Omega \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n \rho_j(t) f_j(\omega) \right|^p dt \right) d\mu(\omega) \leqq B_p^p \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n f_j^2 \right)^{p/2} d\mu \tag{6.6}$$

である．一番左と一番右に現れる積分については

$$\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n f_j^2 \right)^{p/2} d\mu = \int_\Omega \left| \left(\sum_{j=1}^n f_j^2 \right)^{1/2} \right|^p d\mu = \left\| \left(\sum_{j=1}^n f_j^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p$$

となる．(6.6) の中央項に於いて，Fubini の定理により積分順序を交換すると

$$\int_\Omega \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n \rho_j(t) f_j(\omega) \right|^p dt \right) d\mu(\omega) = \int_0^1 \left(\int_\Omega \left| \sum_{j=1}^n \rho_j(t) f_j(\omega) \right|^p d\mu(\omega) \right) dt = \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n \rho_j(t) f_j \right\|_p^p dt = \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n \rho_j f_j \right\|_p^p$$

である．これらを (6.6) へ代入して

$$A_p^p \left\| \left(\sum_{j=1}^n f_j^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p \leqq \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n \rho_j f_j \right\|_p^p \leqq B_p^p \left\| \left(\sum_{j=1}^n f_j^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p$$

が得られる．全三辺を p 乗根に開けば，これ即ち (6.4) である．とにかく見て来た通り芯となる所は Khintchine の不等式以外の何物でもなく，これが (6.4) を Khintchine に帰する所以である． □

次に **(6.5) を示すが，その右側**から始める：

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{n} f_j^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leqq \left(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_p^{p\wedge 2} \right)^{1/p\wedge 2} \tag{6.5)右}$$

指数 p の在り方により二つの場合に分ける．$0 < p \leqq 2$, 即ち $p \wedge 2 = p$ の場合，$p/2 \leqq 1$ であるので，$\mathbb{R}$ 内の縮約三角不等式により，任意の $\omega \in \Omega$ に対し

$$\left(\sum_{j=1}^{n} f_j(\omega)^2 \right)^{p/2} \leqq \sum_{j=1}^{n} f_j(\omega)^{2\cdot(p/2)} = \sum_{j=1}^{n} |f_j(\omega)|^p$$

である．つまり Ω 上

$$\left| \left(\sum_{j=1}^{n} f_j^2 \right)^{1/2} \right|^p \leqq \sum_{j=1}^{n} |f_j|^p$$

となる．この両辺を Ω 上 $d\mu$ で積分することで

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{j=1}^{n} f_j^2 \right)^{1/2} \right\|_p &= \left(\int_\Omega \left| \left(\sum_{j=1}^{n} f_j^2 \right)^{1/2} \right|^p d\mu \right)^{1/p} \leqq \left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{n} |f_j|^p \right) d\mu \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega |f_j|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_p^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_p^{p\wedge 2} \right)^{1/p\wedge 2} \end{aligned}$$

が出る．これは $(6.5)_{右}$ である．次に $2 \leqq p < \infty$, 即ち $p \wedge 2 = 2$ の場合，$p/2 \geqq 1$ だから，$(p/2)$ ノルム $\|\cdot\|_{p/2}$ が三角不等式を満たすことが肝心な着眼点である．故に

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{j=1}^{n} f_j^2 \right)^{1/2} \right\|_p &= \left(\int_\Omega \left| \sum_{j=1}^{n} f_j^2 \right|^{p/2} d\mu \right)^{1/p} = \left(\int_\Omega \left| \sum_{j=1}^{n} f_j^2 \right|^{p/2} d\mu \right)^{(2/p)\cdot(1/2)} \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{n} f_j^2 \right\|_{p/2}^{1/2} \leqq \left(\sum_{j=1}^{n} \|f_j^2\|_{p/2} \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\int_\Omega f_j^{2\cdot(p/2)} d\mu \right)^{2/p} \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\int_\Omega |f_j|^p \, d\mu \right)^{(1/p)\cdot 2} \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_p^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_p^{p\wedge 2} \right)^{1/p\wedge 2} \end{aligned}$$

が導かれる．これ即ち $(6.5)_{右}$ で証明が終わる．つまり証明は縮約にしろ純正にしろ，$\mathbb{R}$ 上の三角不等式だけに立脚した，あまり深いものではないが，とにかくこれが Nordlander の工夫である． □

不等式 (6.5) の検討途中で，その右側については作業完了なので，最後にその**左側**を考える：

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_p^{p\vee 2} \right)^{1/p\vee 2} \leqq \left\| \left(\sum_{j=1}^{n} f_j^2 \right)^{1/2} \right\|_p . \tag{6.5)左}$$

やはり p の在り方による場合分けでこれを示す．$0 < p \leqq 2$, 即ち $p \vee 2 = 2$ の場合，$p/2 \leqq 1$ であることを積極的に使う意味で，逆 Minkowski の不等式[7] が利用される．下記計算途中に現れる．

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{j=1}^{n} f_j^2 \right)^{1/2} \right\|_p &= \left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{n} f_j^2 \right)^{p/2} d\mu \right)^{1/p} = \left(\left\| \sum_{j=1}^{n} f_j^2 \right\|_{p/2}^{p/2} \right)^{1/p} \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{n} f_j^2 \right\|_{p/2}^{1/2} \geqq \left(\sum_{j=1}^{n} \|f_j^2\|_{p/2} \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\int_\Omega f_j^{2\cdot(p/2)} d\mu \right)^{2/p} \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\int_\Omega |f_j|^p \, d\mu \right)^{(1/p)\cdot 2} \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_p^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_p^{p\vee 2} \right)^{1/p\vee 2} \end{aligned}$$

---

7) 任意の $f, g \in L_r(\mu)^+$ に対して $\|f+g\|_r \geqq \|f\|_r + \|g\|_r$ となる．これを**逆 Minkowski の不等式**と言う．

により $(6.5)_{左}$ が $0 < p \leqq 2$ の時示された．次に $2 \leqq p < \infty$, 即ち $p \vee 2 = p$ の場合を考える．$2/p \leqq 1$ だから，$\mathbb{R}$ での 縮約三角不等式を使うと，Ω 上の各点 ω で

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(\omega)^2 = \sum_{j=1}^{n} |f_j(\omega)|^{p\cdot(2/p)} \geqq \left(\sum_{j=1}^{n} |f_j(\omega)|^p\right)^{2/p},$$

即ち，Ω 上

$$\left(\sum_{j=1}^{n} f_j^2\right)^{(1/2)\cdot p} \geqq \sum_{j=1}^{n} |f_j|^p$$

である．両辺を Ω 上 μ で積分すると

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{n} f_j^2\right)^{1/2}\right\|_p^p = \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{n} f_j^2\right)^{(1/2)\cdot p} d\mu \geqq \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{n} |f_j|^p\right) d\mu = \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega |f_j|^p\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_p^p$$

が得られる．この最左の項と最右の項の各々の p 乗根をとると

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{n} f_j^2\right)^{1/2}\right\|_p \geqq \left(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_p^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_p^{p\vee 2}\right)^{1/p\vee 2}$$

となり，これは $(6.5)_{左}$ そのものである．この部分は Orlicz の 1933 年の論文 [15,16] に与えられたもので 1962 年の Nordlander の論文 [14] による $(6.5)_{右}$ と見較べて $1962 - 1933 = 29$ 年にどんな想いを持つのか興味が尽きない．Orlicz [15.16] によれば，Banach が [15,16] の原稿をみて $(6.5)_{左}$ に対しては昔からよく識られた所だとコメントしたとある．いずれにしろ 1933 年と言う大昔観察された所が，1970 年代後半に概念化された型・余型理論の一つの中核であった事は，やはり大きな驚きである．

7. Lebesgue 空間の型と余型. 本節で論ずる所は，本論文の中心課題である Lebesgue 空間の型と余型の決定である．そこで σ 有限かつ非自明な測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の指数 $0 < p \leqq \infty$ の Lebesgue 空間 $L_p(\mu)$ の型と余型を計算する，即ち次の結果に対する証明を与える．

定理 7.1. 測度空間 (Ω, Σ, μ) は σ 有限かつ非自明とし，その上の指数 $0 < p \leqq \infty$ の Lebesgue 空間 $L_p(\mu)$ の型区間 $\mathrm{T}(L_p(\mu))$ と余型区間 $\Gamma(L_p(\mu))$ は次の如くである：

(7.2) $$\mathrm{T}(L_p(\mu)) = (0, p \wedge 2], \quad \Gamma(L_p(\mu)) = [p \vee 2, \infty] \quad (0 < p < \infty);$$

(7.3) $$\mathrm{T}(L_\infty(\mu)) = (0, 1], \quad \Gamma(L_\infty(\mu)) = [\infty, \infty].$$

証明のプログラム：(7.2) の証明と (7.3) の証明は本質的に異なる．(7.2) を示すのに (Ω, Σ, μ) の非自明性による埋蔵関係

(7.4) $$l_p \hookrightarrow L_p(\mu) \quad (0 < p \leqq \infty)$$

を利用する (6.2 参照)．根底事項 II により，$0 < p \leqq \infty$ のとき

(7.5) $$\mathrm{T}(L_p(\mu)) \subset \mathrm{T}(l_p), \quad \Gamma(L_p(\mu)) \subset \Gamma(l_p)$$

となる．そこで構造不等式により

(7.6) $$(0, p \wedge 2] \subset \mathrm{T}(L_p(\mu)), \quad [p \vee 2, \infty] \subset \Gamma(L_p(\mu))$$

を導き，これとは別に直接

(7.7) $$\mathrm{T}(l_p) \subset (0, p \wedge 2], \quad \Gamma(l_p) \subset [p \vee 2, \infty]$$

を示す．しからば，(7.5),(7.6), 及び (7.7) から (7.2) が直ちに従う．よって，(7.6) と (7.7) の証明だけが詳細な論証を要する所である．次に (7.3) の証明計画は次の如くである．一般の任意縮約 Banach 空間 X に対し根底事項 I により $(0, \sigma_X] \subset \mathrm{T}(X)$,

$[\infty,\infty]\subset\Gamma(X)$ であった．X の縮約示数 σ_X については，(4.4) により $\sigma_{L_\infty(\mu)}=\infty\wedge 1=1$ であるから $(0,1]\subset \mathrm{T}(L_\infty(\mu))$, $[\infty,\infty]\subset\Gamma(l_\infty)$ である．(7.4) が $p=\infty$ にも有効で，従って (7.5) も $p=\infty$ で有効であって

$$(0,1]\subset \mathrm{T}(L_\infty(\mu))\subset \mathrm{T}(l_\infty),\quad [\infty,\infty]\subset\Gamma(L_\infty(\mu))\subset\Gamma(l_\infty)$$

が成り立つ．そこでもし

$$\mathrm{T}(l_\infty)=(0,1],\quad \Gamma(l_\infty)=[\infty,\infty] \tag{7.8}$$

が示されたなら，これを上記二つの陳列されている包含関係式により (7.3) が導かれる．こうして (7.3) の証明作業は (7.8) を示すことに転化する．そして (7.8) の証明は定義に基づく直接的考察で達成される．

包含関係 (7.6) の証明： これは構造不等式から一瀉千里に導出される．即ちすべての有限点列 $(f_j)_{j=1}^n\subset L_p(\mu)$ に対して

$$A_p\Bigl(\sum_{j=1}^n\|f_j\|_p^{p\vee 2}\Bigr)^{1/p\vee 2}\leqq\Bigl(\mathbb{E}\Bigl\|\sum_{j=1}^n\rho_jf_j\Bigr\|_p^p\Bigr)^{1/p}\leqq B_p\Bigl(\sum_{j=1}^n\|f_j\|_p^{p\wedge 2}\Bigr)^{1/p\wedge 2}$$

が成り立つと言うのが構造不等式であった．さらに random 平均 $r\mapsto\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n\rho_jf_j\right\|_p^r\right)^{1/r}$ は $(0,\infty]$ 上 r の増加関数であったから (第 5 節参照)

$$\Bigl(\mathbb{E}\Bigl\|\sum_{j=1}^n\rho_jf_j\Bigr\|_p^{p\wedge 2}\Bigr)^{1/p\wedge 2}\leqq\Bigl(\mathbb{E}\Bigl\|\sum_{j=1}^n\rho_jf_j\Bigr\|_p^{p}\Bigr)^{1/p}\leqq\Bigl(\mathbb{E}\Bigl\|\sum_{j=1}^n\rho_jf_j\Bigr\|_p^{p\vee 2}\Bigr)^{1/p\vee 2} \tag{7.9}$$

となる．構造不等式の右側と (7.9) の左側を使うと

$$\Bigl(\mathbb{E}\Bigl\|\sum_{j=1}^n\rho_jf_j\Bigr\|_p^{p\wedge 2}\Bigr)^{1/p\wedge 2}\leqq B_p\Bigl(\sum_{j=1}^n\|f_j\|_p^{p\wedge 2}\Bigr)^{1/p\wedge 2}$$

が出る．これは $p\wedge 2\in\mathrm{T}(L_p(\mu))$ であることを示し，根底事項 I を使えば $(0,p\wedge 2]\subset\mathrm{T}(L_p(\mu))$ がわかる．構造不等式の左側と (7.9) の右側を使うと

$$A_p\Bigl(\sum_{j=1}^n\|f_j\|_p^{p\vee 2}\Bigr)^{1/p\vee 2}\leqq\Bigl(\mathbb{E}\Bigl\|\sum_{j=1}^n\rho_jf_j\Bigr\|_p^{p\vee 2}\Bigr)^{1/p\vee 2}$$

となる．これは $p\vee 2\in\Gamma(L_p(\mu))$ であることを言って居り，根底事項 I により $[p\vee 2,\infty]\subset\Gamma(L_p(\mu))$ である．これで (7.6) が完全に示された．

包含関係 (7.7) の証明： 任意の $r\in\mathrm{T}(l_p)\,(\subset(0,2])$ をとる．するとある定数 $C>0$ があり任意の有限点列 $(x_j)_{j=1}^n\subset l_p$ に対し型不等式

$$\Bigl(\mathbb{E}\Bigl\|\sum_{j=1}^n\rho_jx_j\Bigr\|_{l_p}^r\Bigr)^{1/r}\leqq C\Bigl(\sum_{j=1}^n\|x_j\|_{l_p}^r\Bigr)^{1/r} \tag{7.10}$$

が成立せねばならぬ．そこで，特に，$x_j=(\delta_{j1},\delta_{j2},\delta_{j3},\cdots)\in l_p\ (j=1,\cdots,n)$ にとるならば，$\|x_j\|_{l_p}=1$ であり，又 $\sum_{j=1}^n\rho_jx_j=(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n)$ となり，$[0,1]$ に殆ど到る所

$$\Bigl\|\sum_{j=1}^n\rho_jx_j\Bigr\|_{l_p}=(|\rho_1|^p+\cdots+|\rho_n|^p)^{1/p}=n^{1/p}$$

であるから $\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n\rho_jx_j\right\|_{l_p}^r\right)^{1/r}=n^{1/p}$ となり，又 $\left(\sum_{j=1}^n\|x_j\|_{l_p}^r\right)^{1/r}=n^{1/r}$ である．故に (7.10) は $n^{1/p}\leqq Cn^{1/r}$ の形となる．これは

$$1/p\leqq\log C/\log n+1/r$$

であり，n の任意性により $1/p\leqq 1/r$, 又は $r\leqq p$ となる．元々 $r\leqq 2$ でもあるから，合わせて $r\leqq p\wedge 2$ である．根底事項 I によりこれは $\mathrm{T}(l_p)\subset(0,p\wedge 2]$ を意味する．次に任意の $r\in\Gamma(l_p)\,(\subset[2,\infty])$ をとると $r\geqq p\vee 2$ となる事を言いた

い．$r=\infty$ なら勿論これは言えているから，$r<\infty$ として言えば十分である．すると，ある定数 $C>0$ があって任意の有限点列 $(x_j)_{j=1}^n \subset l_p$ に対し余型不等式

(7.11) $$C\Big(\sum_{j=1}^n \|x_j\|_{l_p}^r\Big)^{1/r} \leqq \Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^n \rho_j x_j\Big\|_{l_p}^r\Big)^{1/r}$$

が成り立つ．そこで，前半同様 $x_j=(\delta_{j1},\delta_{j2},\cdots)\in l_p$ $(j=1,\cdots,n)$ にとって同じ計算をすれば，前同様 $Cn^{1/r}\leqq n^{1/p}$ $(n\in\mathbb{N})$ だから $r\geqq p$ が出る．元々 $r\geqq 2$ だから結局 $r\geqq p\vee 2$ である．再度根底事項 I より，これは $\Gamma(l_p)\subset[p\vee 2,\infty]$ を意味し，以上で (7.7) も完全に示された． □

これで (7.2) の成立が確認されたので，次に (7.3) の証明に入る．(7.8) から (7.3) が従うので，(7.8) を証明する．記号の使いやすさの観点から，本来の定義 $l_\infty=L_\infty(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}},\#)$ により，l_∞ を数列空間より関数空間 (Lebesgue 空間) の視点で記号を使う (4 節参照)．従って，$w\in l_\infty$ は関数 $n\mapsto w(n):\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ で，$\|w\|_{l_\infty}=\sup_{n\in\mathbb{N}}|w(n)|$ である．l_∞ の基本単位ベクトル列 $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ を各 $j\in\mathbb{N}$ につき

(7.12) $$e_j(k)=\delta_{jk}\quad(k\in\mathbb{N})$$

で与える．δ_{ij} は Kronecker のデルタ，念の為．(7.8) の第 2 等式 $\Gamma(l_\infty)=[\infty,\infty]$ の証明はいわば浅い浅い川渡りでゴム長靴でもあれば十分であるが，(7.8) の第 1 等式 $\mathrm{T}(l_\infty)=(0,1]$ の証明はだいぶん大変で伝馬船位は準備せねばならぬ．

(7.8) の第 2 等式 $\Gamma(l_\infty)=[\infty,\infty]$ の証明：一般論から $\Gamma(l_\infty)\subset[2,\infty]$ であるが，実は $\Gamma(l_\infty)=[\infty,\infty]=\{\infty\}$, 即ち l_∞ の余型は唯一つ ∞ のみである事を示す．換言すれば，$\Gamma(l_\infty)\cap[2,\infty)=\emptyset$ を示したい．背理法により $r\in\Gamma(l_\infty)\cap[2,\infty)$ の存在を仮定する：$2\leqq r<\infty$. すると或定数 $C>0$ がみつかって，任意有限列 $(w_j)_{j=1}^n\subset l_\infty$ に対して

(7.13) $$C\Big(\sum_{j=1}^n \|w_j\|_{l_\infty}^r\Big)^{1/r} \leqq \Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^n \rho_j w_j\Big\|_{l_\infty}^r\Big)^{1/r}$$

が成り立つ．特に上式を $w_j=e_j$ $(1\leqq j\leqq n)$ で考えよう．すぐに解かる様に $\Big(\sum_{j=1}^n\|e_j\|_{l_\infty}^r\Big)^{1/r}=n^{1/r}$ であるが，これも又同様直ぐ解る様に

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^n \rho_j e_j\Big\|_{l_\infty}^r\Big)^{1/r}=\Big(\mathbb{E}\Big(\sup_{1\leqq j\leqq n}|\rho_j|^r\Big)\Big)^{1/r}=1$$

であるので，$w_j=e_j$ $(1\leqq j\leqq n)$ で考えた (7.13) はこの時 $Cn^{1/r}\leqq 1$ の形をとる．$n\in\mathbb{N}$ は任意に選んで良いから，この最後の不等式群 $Cn^{1/r}\leqq 1$ $(n\in\mathbb{N})$ は明白な矛盾であり，$\Gamma(l_\infty)=\{\infty\}=[\infty,\infty]$ が確かに導かれた． □

(7.8) の第 1 等式 $\mathrm{T}(l_\infty)=(0,1]$ の証明： 実は我々の前論文 [13] に於いて，$\mathrm{T}(L_\infty(\mu))=(0,1]$ (に当たる所) の証明を与えて居た．$L_\infty(\mu)$ の基礎測度空間 (Ω,Σ,μ) は σ 有限と非自明の二条件を満たす限り何時でも $\mathrm{T}(L_\infty(\mu))=(0,1]$ は正しいと言う証明があるのなら，$l_\infty=L_\infty(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}},\#)$ の基礎測度空間 $(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}},\#)$ は σ 有限, 非自明の二条件を持つのだから，$\mathrm{T}(l_\infty)=(0,1]$ の証明を与えて居ることにもなっている．何故，それにもかかわらず，$\mathrm{T}(l_\infty)=(0,1]$ の証明をこゝに述べるか．それは，これから逆に $\mathrm{T}(L_\infty(\mu))=(0,1]$ が出るだけでなく，$\mathrm{T}(L_\infty(\mu))=(0,1]$ の直接証明より $\mathrm{T}(l_\infty)$ の直接証明は随分と楽であると言う理由による．

閑話休題，一般に型集合の性質として，$(0,\sigma_{l_\infty}]=(0,1]\subset\mathrm{T}(l_\infty)\subset(0,2]$ であるので，$\mathrm{T}(l_\infty)=(0,1]$ を示すには $\mathrm{T}(l_\infty)\cap(1,2]=\emptyset$ を言えばよい．そこで背理法の仮定として，$r\in\mathrm{T}(l_\infty)\cap(1,2]$ となる r が存在したとする，即ち $1<r\leqq 2$ であり，かつ或定数 $C>0$ が存在して，すべての有限点列 $(w_j)_{j=1}^n\subset l_\infty$ に対して

(7.14) $$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{j=1}^n \rho_j w_j\Big\|_{l_\infty}^r\Big)^{1/r} \leqq C\Big(\sum_{j=1}^n \|w_j\|_{l_\infty}^r\Big)^{1/r}$$

が成り立つ．さて

$$E_n:=\Big\{\frac{k}{2^n}:k=0,1,\cdots,2^n\Big\}\quad(n\in\mathbb{N})$$

と置けば，$E := \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ は $[0,1]$ 内の 2 進有理数の全体である．するとすべての $n \in \mathbb{N}$ で $|\rho_n(t)| = 1$ $(t \in [0,1]\backslash E)$ である．暫くの間任意に $n \in \mathbb{N}$ を固定する．$[0,1]\backslash E_n$ は 2^n 個の小開区間 $J_1, \cdots, J_{2^n}$ からなる：

$$J_j := \left\{ t \in [0,1] : \frac{j-1}{2^n} < t < \frac{j}{2^n} \right\} \quad (j = 1, \cdots, 2^n). \tag{7.15}$$

夫々の J_j $(j = 1, \cdots, 2^n)$ 上

$$(\rho_1(t), \cdots, \rho_n(t)) = (s_{1j}, \cdots, s_{nj}) \quad (t \in J_j) \tag{7.16}$$

と置く．ここに各 s_{ij} $(i = 1, \cdots, n)$ は $+1$ 又は -1 とする．さてここで (7.14) を考えるに当たって l_∞ の特別の点列 $(w_i)_{i=1}^n$ を次の如くにとる：

$$w_i := \sum_{j=1}^{2^n} s_{ij} e_j \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{7.17}$$

$e_j(k) = \delta_{jk}$ $(j = 1, \cdots, 2^n; k \in \mathbb{N})$ であるから

$$w_i(k) = \sum_{j=1}^{2^n} s_{ij}\delta_{jk} = \begin{cases} s_{ik} & (k \in \mathbb{N}, k \leqq 2^n) \\ 0 & (k \in \mathbb{N}, k > 2^n) \end{cases} \tag{7.18}$$

が $i = 1, \cdots, n$ に対して成り立つ．これにより

$$\|w_i\|_{l_\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |w_i(k)| = \max_{1\leqq k\leqq 2^n} |s_{ik}| = 1 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{7.19}$$

となる．$l = 1, \cdots, 2^n$ を一つとる．(7.18) と (7.16) により，任意の $t \in J_l$ に対し

$$\sum_{i=1}^n \rho_i(t) w_i(k) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^n s_{il}s_{ik} & (k \in \mathbb{N}, k \leqq 2^n) \\ 0 & (k \in \mathbb{N}, k > 2^n) \end{cases}$$

が出る．従ってこれに基づいて

$$\left\| \sum_{i=1}^n \rho_i(t) w_i \right\|_{l_\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i=1}^n \rho_i(t) w_i(k) \right| = \max_{1\leqq k\leqq 2^n} \left| \sum_{i=1}^n s_{il}s_{ik} \right|$$

が結論される．所ですべての $k = 1, \cdots, 2^n$ に対し

$$\left| \sum_{i=1}^n s_{il}s_{ik} \right| \leqq \sum_{i=1}^n |s_{il}||s_{ik}| = \sum_{i=1}^n 1\cdot 1 = n$$

であり，同様にして $k = l$ に対し

$$\left| \sum_{i=1}^n s_{il}s_{il} \right| = \sum_{i=1}^n (s_{il})^2 = \sum_{i=1}^n 1 = n$$

であるので，すべての $t \in J_l$ に対し

$$\left\| \sum_{i=1}^n \rho_i(t) w_i \right\|_{l_\infty} = n \tag{7.20}$$

となる．上式での l は任意に取り得るので，結局 (7.20) はすべての $t \in [0,1]\backslash E_n$ で成り立つ．だから

$$\left\| \sum_{i=1}^n \rho_i(t) w_i \right\|_{l_\infty}^r = n^r \quad (t \in [0,1]\backslash E_n)$$

となり，$\mathbb{P}(E_n) = 0$ だから

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \rho_i w_i \right\|_{l_\infty}^r \right)^{1/r} = (n^r)^{1/r} = n \tag{7.21}$$

となる．(7.14) 〜 (7.19) と (7.21) を代入すると，$n \leqq Cn^{1/r}$ となる．両辺の log を取り $\log n$ で割ると

$$1 \leqq \frac{\log C}{\log n} + \frac{1}{r}$$

が出る．$n \in \mathbb{N}$ は任意でよいから，$n \to \infty$ として $1 \leqq 1/r$, 即ち $r \leqq 1$ でなければならぬが，これは背理法の仮定 $1 < r \leqq 2$ に反する．よって $\mathrm{T}(l_\infty) = (0,1]$ が結論出来る． □

縮約 Banach 空間 X が optimal な型 $\tau(X)$ と optimal な余型 $\gamma(X)$ を持つ場合は，X の型空間 $\mathrm{T}(X) = (0, \tau(X)]$, 余型空間 $\Gamma(X) = [\gamma(X), \infty]$ となる．根底事項 II より，二つの 縮約 Banach 空間 X と Y が共に optimal な型と余型を持つ場合には次の事が言える．ここでは以下積空間 $A \times B$ の元を (a,b) ではなく $\langle a,b \rangle$ $(a \in A, b \in B)$ とかいて，区間 $(a,b) := \{a < x < b\}$ との混同を避けることにする．

非同型性判定条件：$\langle \tau(X), \gamma(X) \rangle \neq \langle \tau(Y), \gamma(Y) \rangle$ ならば $X \not\approx Y$ となる．

本質的には全く同一であるが，optimal の意味での型と余型の言葉を使って，定理 7.1 を次の様に言い換えておくと色々と便利でより印象的である．

定理 7.22. ***σ*有限非自明な測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の Lebesgue 空間 $L_p(\mu)$ $(0 < p \leqq \infty)$ の optimal の意味での型と余型は次の如くである：**

$$\langle \tau(L_p(\mu)), \gamma(L_p(\mu)) \rangle = \langle p \wedge 2, p \vee 2 \rangle \quad (0 < p < \infty), \tag{7.23}$$

$$\langle \tau(L_\infty(\mu)), \gamma(L_\infty(\mu)) \rangle = \langle 1, \infty \rangle. \tag{7.24}$$

この結果は $1 \leqq p < \infty$ の場合の余型については 1933 年の Orlicz[15,16] 以来，又型については 1962 年の Nordlander[14] 以来本質的には識られて居た訳である ([7] 参照)．$0 < p < 1$ の場合は無論本論文で初めて述べられたものであるし，$p = \infty$ についての結果又はその証明に関する文献は我々の前著 [13] 以外は現著者等は依然全然識らない．(7.23),(7.24) で示された結論は表にしたりグラフにしたりすると印象的で分り易い (図 9 及び図 10 参照)．

空間 X	$L_p(\mu)$ $(0 < p < 2)$	$L_2(\mu)$	$L_p(\mu)$ $(2 < p < \infty)$	$L_\infty(\mu)$
$\tau(X)$	p	2	2	1
$\gamma(X)$	2	2	p	∞

図 9

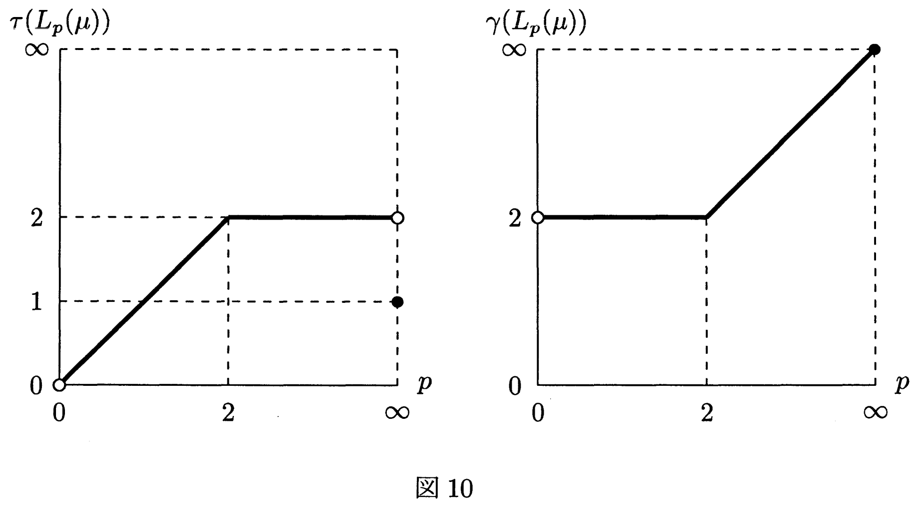

図 10

上掲定理 7.22(又は図 9 の表) から直ぐ観てとれる様に，$L_p(\mu)$ と $L_q(\mu)$ $(0 < p, q \leqq \infty)$ に於いて，$p \neq q$ ならば，

$0 < p,\ q < \infty$ に対しては

$$\langle \tau(L_p(\mu)), \gamma(L_p(\mu)) \rangle = \langle p \wedge 2, p \vee 2 \rangle \neq \langle q \wedge 2, q \vee 2 \rangle = \langle \tau(L_q(\mu)), \gamma(L_q(\mu)) \rangle$$

であり，又 $0 < p < \infty$ で $q = \infty$ に対しては

$$\langle \tau(L_p(\mu)), \gamma(L_p(\mu)) \rangle = \langle p \wedge 2, p \vee 2 \rangle \neq \langle 1, \infty \rangle = \langle \tau(L_\infty(\mu)), \gamma(L_\infty(\mu)) \rangle$$

なので非同型性判定条件より直ちに次の結果が得られる：

定理 7.25 (Orlicz の同型定理). σ 有限非自明測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の Lebesgue 空間 $L_p(\mu)$ と $L_q(\mu)$ $(0 < p,\ q \leqq \infty)$ が同型，即ち $L_p(\mu) \approx L_q(\mu)$，となる為の必要十分条件は夫々の指数が一致，即ち $p = q$，となることである.

この定理は元々 Orlicz[16] が古典測度空間 $(I, \mathcal{L}, \mathbb{P})$ 上の Lebesgue 空間 L_p や L_q に対し，しかも指数は $1 \leqq p,\ q < \infty$ に限定された形で導いたものである．σ 有限非自明な一般測度空間 (Ω, Σ, μ) 上の無限指数や単位以下の正指数を含む一般指数 $0 < p,\ q \leqq \infty$ の Lebesgue 空間 $L_p(\mu)$ と $L_q(\mu)$ に対する場合，即ち現定理 7.25, は我々が前著 [13] で示したが，型や余型を $0 < p, q < 1$ の場合用意出来ていなかったので，文字通り四苦八苦の末証明を捻り出した．上の如くすっきりと首尾一貫した証明が出来たのは，新概念である 縮約 Banach 空間の導入とその上の型・余型理論の構成と言う捏ち上げ紛いの所作ながら，それでも，その成果である.

参 照 文 献

[1] F. Albiac and N. J. Kalton: *Topics in Banach Space Theory,* Graduate Texts in Mathematics **233**, Springer, 2006.

[2] S. Banach: *Théorie des Opérations linéaires,* Monografje Matematyczne, Warsaw, 1932

[3] N. Dunford and J. T. Schwartz: *Linear Operators* (Part I: General Theory), Pure and Applied Mathematics, Vol. **7**, Interscience Publishers, 1967.

[4] P. L. Duren: *Theory of H^p Spaces,* Dover Books on Mathematics, Dover Publication, Inc., New York, 2000.

[5] P. R. Halmos: *Measure Theory,* D. Van Nostrand, 1950.

[6] J. Hoffman-Jϕrgensen: *Sums of independent Banach space valued random variables,* Studia Math., **52**(1974), 159–186.

[7] J. P. Kahane: *Sur les sommes vectorielles $\sum \pm u_n$,* C. R. Acad. Sci. Paris, **259**(1964), 2577–2580.

[8] A. Khintchine: *Über dyadische Brüche,* Math. Z., **18**(1923), 109–116.

[9] A. Khintchine and A. N. Kolmogoroff: *Über Konvergenz von Reihen, dieren Glieder durch den Zufall bestimmt werden,* Math. Sb., **32**(1925), 668–677.

[10] J. E. Littlewood: *On bounded bilinear forms in n infinite number of variables,* Q. J. Math. (Oxford), **1**(1930), 164–174.

[11] B. Maurey: *Type, cotype and K-convexity,* Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. **2**, North-Holland, Amsterdam, (2003), 1299–1332.

[12] B. Maurey and G. Pisier: *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach,* Studia Math., **58**(1976), 45–90.

[13] M. Nakai and J. Narita: *The isomorphism theorem of Lebesgue spaces,* Bull. Daido Univ., **48**(2012), 1–30 (in Japanese).

[14] G. Nordlander: *On sign-independent and almost sign-independent convergence in normed linear spaces,* Ark. Mat., **4**(1962), 287–296.

[15] W. Orlicz: *Über unbedingte Konvergenz in Funktionräumen I,* Studia Math., **4**(1933), 33–37.

[16] W. Orlicz: *Über unbedingte Konvergenz in Funktionräumen II,* Studia Math., **4**(1933), 41–47.

[17] H. Rademacher: *Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen,* Math. Ann., **87**(1922), 112–138.

[18] K. Yosida: *Functional Analysis,* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzelldarstellungen, Band **123**, Springer-Verlag, 1965.