ルービック・キューブとその仲間たち

Rubik's Cube and modified versions

大石弥幸*

Yasaki Oishi

Summary

Rubik's Cube is a 3-D puzzle invented by Ernő Rubik and is very popular all over the world. Here many modified versions of the Rubik's Cube are introduced. Also the minimum procedure to solve the puzzle, how to solve the problem by a computer, are explained, with some simple examples, to reach "The God's Number" 20.

キーワード：ルービック・キューブ，パズル，スライディング・ブロック・パズル，最短手、神の数

keywords：Rubik's Cube, Puzzle, God’s Number, Minimum Procedure, Two Layers Cheese Cake

1. はじめに

ルービック・キューブは 1980 年代に世界的に大流行となった立体パズルである。その不思議な構造とパズルの難しさから今でも愛好者が多い。ここではその誕生から始め、次々と作成されている亜種たちを紹介するとともに、「何手あれば解決できるか」の研究やコンピュータを用いた計算手法について、やさしい実例を示しながら解説する。

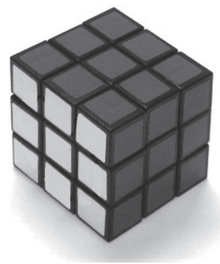

図 1 ルービック・キューブの外観

2. ルービック・キューブ

2.1　構造

ルービック・キューブ（Ribik's Cube）は立体スライディング・ブロック・パズルあるいはローテーティング・ピース・パズルと呼ばれるパズルの一種である（図 1)。形は小さい立方体（以下キューブ）を 3 行 3 列 3 段に積んで全体として立方体を構成している（図 2)。そして各行、列、段となる 9 個のキューブが離れずに回転する。初期状態として、全体の 6 つの面ごとに異なる色のシールが貼られているが、いろいろな部分を回転させると色は不ぞろいになってしまう。それを元の状態に戻せというのがパズルとしての課題である。

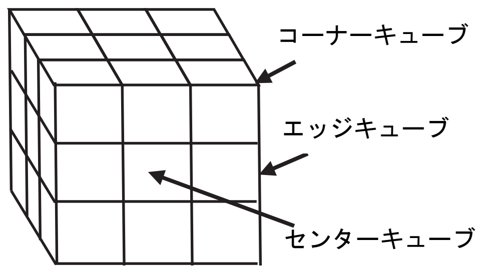

図 2 キューブの名称

これからルービック・キューブを解説するために若

* 大同大学情報学部情報システム学科

干の用語を説明しておく。ルービック・キューブを構成するキューブは、外から見えるものが 26 個ある。そのうち各面の中央で 1 面だけが見えている 6 個のキューブをセンターキューブと呼ぶ。辺の中央で 2 面が見えているものはエッジキューブで、全部で 12 個ある。そして 8 か所の角で 3 面が見えているのはコーナーキューブという。

2.2　歴史

ルービック・キューブはハンガリーの建築学者エルノー・ルービック（Ernő Rubik 、1944−）が 1974 年に考案し、1977 年に商品化された[1]。日本では 1980 年に（株）ツクダオリジナルから発売されるやいなや大流行となった。

当時ルービック・キューブが話題となった要因のひとつはそのメカニズムであった。9 個ずつのキューブがすべての面で回転でき、それでもキューブがバラバラにならずに立方体を保っていることがなんとも不思議であった。もうひとつはパズルとしての難しさである。複数のキューブがまとまって動くため、特定のキューブを特定の位置に移動させるのが非常に難しい。買ってはみたが元の状態に戻せずに諦めたという人が多かったようだ。そのため解法を説明した攻略本もたくさん出版された。

ルービック・キューブはエルノー・ルービックが 1976 年に特許を取得している。しかし立体スライディング・ブロック・パズルとしてはそれに先行するものがあった。1959 年には既に 2×2×2 のパズルがアメリカの Larry Nichols によって製作されている[1,2]。ただしこれはメカニカルに結合されたものではなく、8 個のキューブを磁石で一体化したものであった。

ルービック・キューブのブームに隠されてそのことを知る人は少ないが、実は 3×3×3 の可動立体構造については、ルービックの特許取得の前後（1975−77 年）に日本の石毛照敏氏が同様のアイデアで 4 件の特許を取得している[2]。

いずれにせよ、この種のパズルは「ルービック・キューブ」の名前で世界的に知られるようになり、パズルを解くのにかかる時間を競う競技会も開かれている。

また、ルービック・キューブの亜種とも呼べるような立体スライディング・ブロック・パズルが続々と登場してきた。そして現在でも新種が発売され続けている。

2.3　亜種の増殖

ルービック・キューブはいくつかの方向に発展していった。まずはキューブの数を変える方向である（図 3）。ルービック・キューブの簡易版として Pocket Cube という名前で 2×2×2 がすぐに商品化された。キューブを増やす方向では Rubik’s Revenge という名で 4×4×4 が、そして Professor's Cube として 5×5×5 が発売された。n×n×n のシリーズは構造の複雑さからこの辺りが限界かと考えられたが、さらにサイズの大きいものが製作され 2018 年現在ではなんと 17×17×17 のものまで販売されている。

縦、横、高さの数が異なるパターンも多く作られている。2×2×1、3×3×1、2×2×3、3×3×2、…、4×4×6、…と数えきれないほどのパズが存在する（図 4 参照）。なお、このような直方体のパズルの場合、回転の仕方にバリエーションが出てくる。それは、長方形の部分が 180 度回転に限定され全体が常に直方体を維持するか、90 度回転も可能で直方体から逸脱できるか

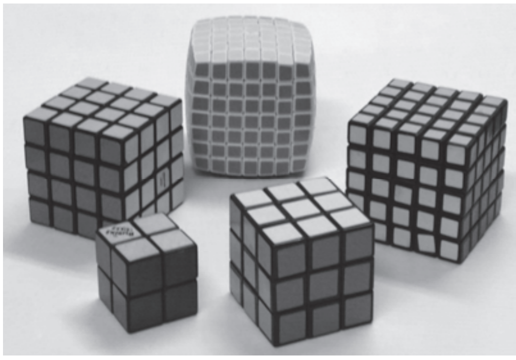

図 3　n×n×n のキューブ

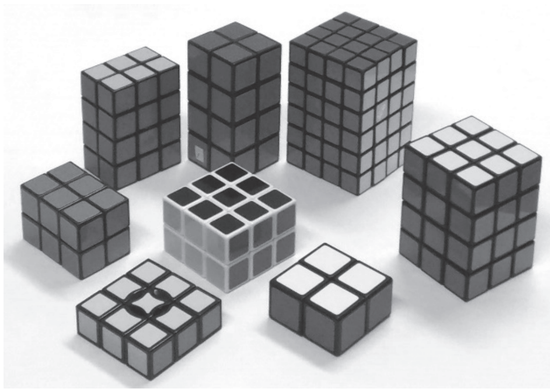

図 4　直方体のキューブ

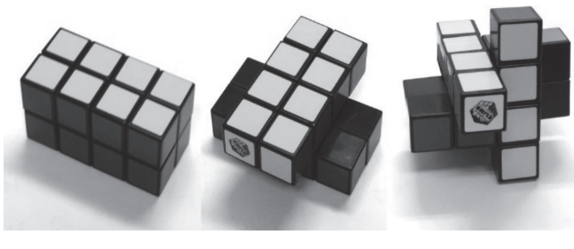

図 5　直方体から逸脱する状態

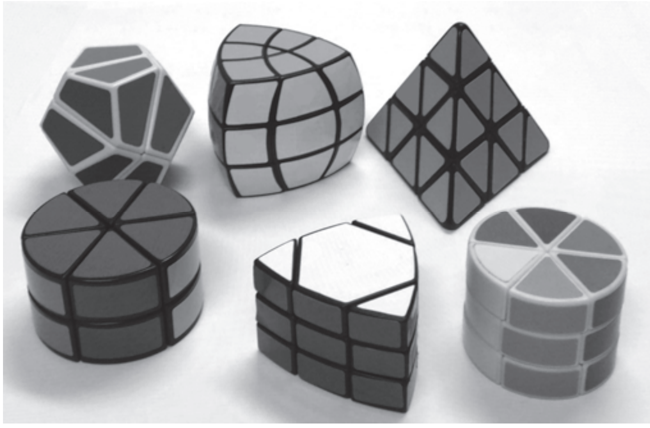

図 6　様々なルービック・キューブの亜種

である。

後者の場合は全体の形が回転ごとに不整形に変化してパズルの難易度を上げることになる（図 5）。

また、別の発展の方向としては回転断面が斜めのもの、さらには全体が円柱、三角柱、三角錐、正十二面体、球など、と様々なパズルが販売されている。しかし中には短期間で製造中止となり入手困難になるものも多い（図 6）。

なお、形の変化ではないが構造を見直して回転を滑らかにするような改良も見られる。これは競技会のための要請から作られたものである。キューブ（ブロック）が多少ずれていても回転ができるような遊びがあり、同じ外見であっても発売当初のものとは比べ物にならないほど滑らかに回転する。

2.4　3×3×3 のバリエーション

以上のようにキューブ数の違いから見た亜種は数えきれないほど存在する。そこで基本中の基本である 3×3×3 に限定してみる。この場合でもいくつかの亜種がある。一番単純なのは面の色を変えただけのものである。基本は面ごとに色分けしてあるが、これを段ごとに塗り分けたり、市松模様に塗り分けたり、さらには絵柄や写真が印刷されているものもある。こうなると形は同じでもパズルの性格は全く異なったものとなってしまう。

そこまで大きな差ではなくてもオリジナルのルービック・キューブとちょっと違うだけなのにパズルとして難しくなるという例もある。それはセンターキューブに文字や記号を書くだけである。オリジナルのルービック・キューブではセンターキューブに何の印もないのでその向きは問わない。しかし実際にルービック・キューブを崩して組み立てなおしてみるとセンターキューブの向きが変わっていることがある。そこでセンターキューブの向きの一致も条件とすることによって難易度が上がることになる。

図 7　ボイド・キューブ

同様にセンターキューブに注目した面白いパズルがある。それはボイド・キューブと呼ばれるものである（図 7）。なんとセンターキューブがない。全体の中心となる部分もキューブがないので、上下、前後、左右に穴が貫通している。センターキューブがないということは、色も位置も合わせる必要がないので解法は簡単になるように思われる。

ところが、センターキューブがないことにより 6 面に集めるべき色がわからないのである。整列状態を覚えておいて色を合わせないとどうしても完成できないことになってしまう。また、このパズルは構造的にも面白い。コアとなる中心のキューブがないにも関わらず全体の立方体が崩れない巧みな構造には驚かされる。

3. ルービック・キューブは何手で解けるか

次はルービック・キューブを研究する者たちが最も関心を寄せる問題について述べる。バラバラの状態からすべての色をそろえるには何手必要かという問題である。

3.1　3×3×3 は何手で解けるか

オリジナルの 3×3×3 のルービック・キューブを解く場合を考える。もちろん最初の状態によって多くの手数がかかる場合もあればすぐに完成する場合もある。

そこで、考えるべきは、「どんな状態からであっても N 手で完成できる」というときの N の最小値である。言い換えると、どんな状態でもうまくやれば N 手より多くかかることはないということである。これはルービック・キューブが作られてからすぐに問題となっていたがなかなか解決できない難問であった。

パズリストたちは解法の手順をいろいろと見つけてはいたが、それは最短手とは程遠いものであった。一般に知られている解法は、まず 1 段目の色を揃え、次に 2 段目を揃え…というようにわかりやすい通過地点を設定している。そのため、最短手に比べるとかなり

遠回りをしていることになる。こうした方法では少なくても 100 手程度は必要になってしまう。

この問題に対して群論などを援用して数学的に説明するもの[3]もあったが、純粋に数学的な考察からは答えは出てこなかった。数学で問題を解きやすくしつつもコンピュータによる計算に頼らなければならないだろうと考えられるようになった。そして、いつしかこの N は「神の数」（God's Number）と呼ばれるようになった。

その後、何度か N の上限を与える研究が発表されたり具体的に N がいくつだと発表されたりしたこともあったが、なかなか正解にたどりつくことはできなかった。そして、ついに 2010 年に Morley Davidson らによって 20 であることが証明された[4)5)]。

さて、この問題を議論するには 1 手をどう定義するかが重要である。ある面を回転するとき、左右に 90 度回転するか 180 度回転するかであるが、180 度を 1 手とするか、2 手とするかを決めておかなければならない。上の 20 という結果は 180 度を 1 手と数えている。それにしても、これは普通にパズルに触れる人たちの予想よりもかなり小さい値であった。

3.2　最短手をどのように見つけるか

ルービック・キューブのように 1 手の処理ごとに状態が変化していくパズルを考えるには、その状態の表現方法を決め全部でどれだけの状態に変化できるかを見つけておくことが重要である。3×3×3 のルービック・キューブではコーナーキューブとエッジキューブの位置と向きで状態を表すことができる。全体を回転した状態を重複して数えないためにはどこかを空間に対して固定すればよい。この場合はセンターキューブが移動しないとすればよい。

8 個のコーナーキューブは位置の順列が 8!で、その向きの組み合わせは 3^8 通りある。また、エッジキューブ 12 個の位置の順列は 12!で、キューブの向きの組み合わせは 2^{12} 通りある。ただしキューブは個々に独立して動けないためパリティの保存などがあって実際は

$$8! \times 3^8 \times 12! \times 2^{12} \div 12 \fallingdotseq 4.3 \times 10^{19}$$

およそ 4300 京の状態がある。

神の数 N は言い換えれば、ある状態からスタートしてこの数の状態をすべて作り出して最高で何手かかったかである。これは全状態で作る集合空間内の 2 点間の最大距離（直径）ともいえる。

それを知るには、コンピュータ上で 1 手 1 手動かしてすべての状態が出そろうまで調べればいい、ということになるが 4300 京という数は巨大すぎる。スーパー・コンピュータであっても天文学的な時間を要する。

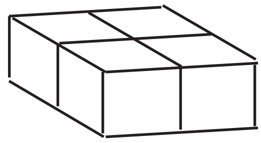

図 8　2×2×1 キューブ

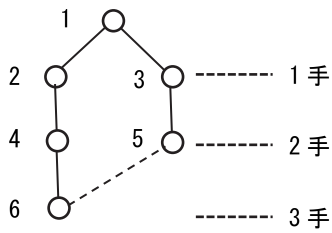

図 9　2×2×1 の状態グラフ

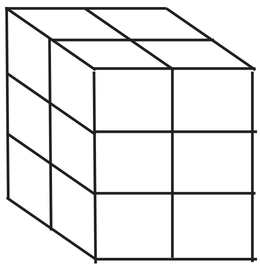

図 10　2×2×3 キューブ

3.3　簡単なパズルから探る

3×3×3 のルービック・キューブが無理ならばずっと簡単なパズルから始めて様子を探す。最も単純なパズルとして 2×2×1 を考える（図 8)。

全体の回転を禁止するには特定のひとつのキューブを固定する。すると可動部分は 2 か所だけでしかも 180 度回転しかないので、コンピュータを使わずとも数え上げは簡単にできる。図 9 はそうして作られるすべての状態の遷移関係をグラフで表わしている。

図中の初期状態の 1 から 1 手で 2 と 3 の状態に変化する。2 からは 4 へ 3 からは 5 へ変化する。4 からは 6 に変化し、5 からも 6 へつながる。6 からはそれ以外の状態は生まれないのでこれで 6 つの全状態が出そろった。結果、この神の数は 3 と分かる。

他のパズルでも同じことをすればよい。この方法は、個々の状態をノードとして 1 手で移動する関係をリンクで結ぶグラフにすることである。その際ループができないように枝どうしをつなげない木構造とする。そして状態を数え上げるときは手数の少ないところから順に検索する幅優先検索とする。

3.4　パソコンで計算できるパズル

この方法で計算したもう少し複雑な例を示す。今度は 2×2×3 のパズルである（図 10)。中段左後ろのキューブを固定すると、上段と下段の 4 つのキューブで左

右 90 度、180 度、前面長方形 6 個のキューブで 180 度、右面長方形 6 個のキューブで 180 度の 8 通りの動きがある。これらの動きをすべて組み合わせて、n 手目で現れる状態数を示すと図 11 のグラフと表 1 のようになる。手数が増えると爆発的に状態数が増えるが、11 手目でピーク（49792）に達したのちは急激に減って 14 手目以降では新たな状態は生まれない。14 手の累計で 242920 の状態が出尽くした。この 2×2×3 パズルの神の数は 14 である。なお、1 手を 90 度に限定すると神の数は 15 である。

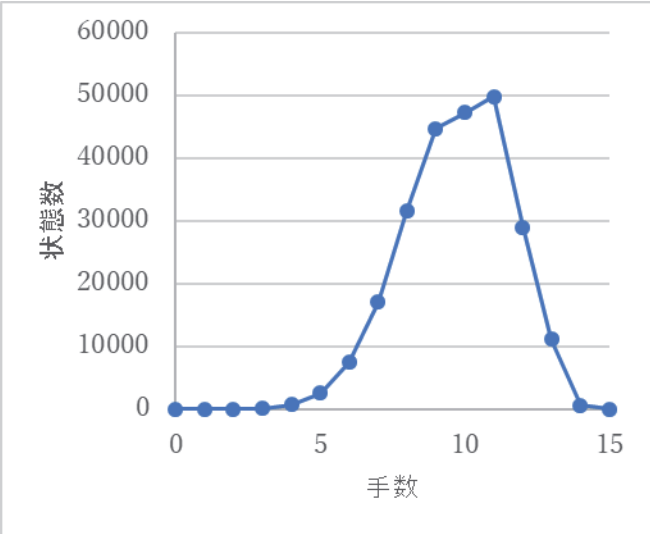

図 11　2×2×3 キューブの手数と状態数

表 1 2×2×3 キューブの手数と状態数

手数	状態数	累積状態数
0	1	1
1	8	9
2	35	44
3	157	201
4	678	879
5	2527	3406
6	7442	10848
7	17088	27936
8	31568	59504
9	44704	104208
10	47216	151424
11	49792	201216
12	29024	230240
13	11104	241344
14	576	241920
15	0	241920

同様の方法で 2×2×2 のキューブ（Pocket Cube：図 3 の前左）について計算すると、いろいろなところ [6] で報告されている通り 11 手で 3674160 のすべての状態を作り出すことができる。つまりこのパズルの神の数は 11 である。

もう少し状態数が多い例を示そう。これは Two Layers Cheese Cake という円柱状のパズルである。図 12 のように，6P チーズを 2 段に重ねたような形をしていて、面の色は整列状態で，上面全体が緑，下面全体が青，側面は上下段同じ色で，60 度ごとに白，灰，橙，赤，紫，黄となっている。動き方は，まず円柱の上半分と下半分が別々に 60 度単位で回転する。また 60 度ごとの 3 つの縦断面を境に全体を 2 分割して回転する。

例によって全体の回転を禁止するために 1 個だけ動かないブロックを決めて、可能な手を繰り返していく。出てくる状態数は図 13 の通りである。個々の数値は表 2 に示す。総計は 39916800 となる。そして神の数は 16 であった。ただし、円周方向は 60 度を 1 手とする。

この場合の状態総数は約 4 千万にもなり、単純なコーディングのプログラムでは計算時間も相当長くなる。パソコンレベルで計算できるのはこの程度のパズルが限界であろう。

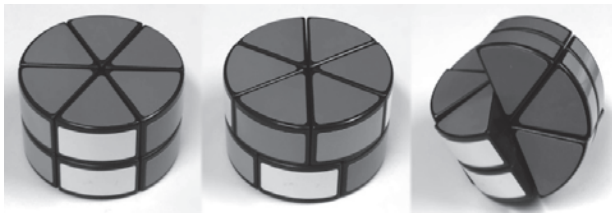

図 12　Two Layers Cheese Cake の外観

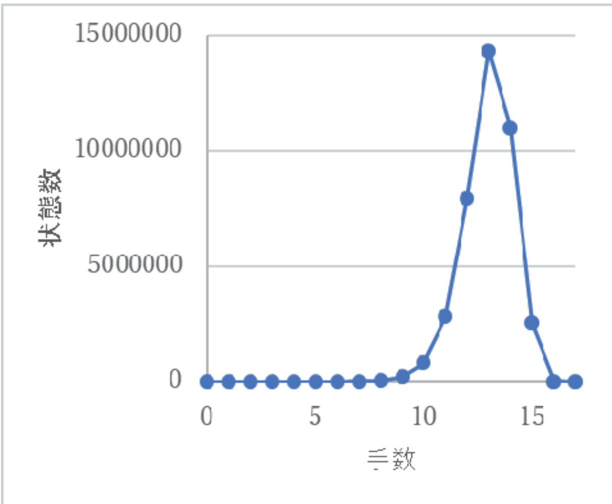

図 13 Two Layers Cheese Cake の手数と状態数

表 2　Two Layers Cheese Cake の手数と状態数

手数	状態数	累積状態数
0	1	1
1	5	6
2	20	26
3	79	105
4	306	411
5	1185	1596
6	4550	6146
7	17240	23386
8	64582	87968
9	236713	324681
10	841951	1166632
11	2825790	3992422
12	7998476	11990898
13	14330740	26321638
14	11028854	37350492
15	2546648	39897140
16	19660	39916800
17	0	39916800

3.5　3×3×3 キューブでは

上で示したパソコンによる全状態検索の方法では頑張っても 1 億程度が限界であろう。それに対して、3×3×3 キューブは全状態数が約 4300 京であることはすでに述べた。

Morley Davidson たちが計算したのはすべての手と状態のつながりを調べつくすのではなく、距離（手数）が 20 以下であることのチェックのみである。

計算の高速化のためにまず群論的な考察により全 4300 京を 22 億個程度の個々に独立で扱える小問題に分割したという。さらに動きの対称性などから計算を省略できる部分を見つけ 1 つの問題ならパソコンでも処理可能なレベルまでもっていった。

それでもその小問題の数が莫大で、計算に 35 年はかかると見積もられた。それを解決したのは Google 社のスーパー・コンピュータを借りるという方法だった。かくして神の数 20 が得られた。

4. おわりに

今や何百種も存在するであろうルービック・キューブの仲間たちであるが、何手で解けるかという単純な問いに答えられるのはキューブ数の少ないわずかな種類のものに限られる。元祖のルービック・キューブでさえ、9 年ほど前にやっと手が届いたという状況である。

しかも最高レベルのスーパー・コンピュータを贅沢に使ってである。数学的な理論でエレガントに求められたわけではない。

近年、数学問題の証明にコンピュータを使う（使わざるを得ない）という例が増えている。有名な 4 色問題 [7]（地図の隣接する国を異なる色で塗分けるには 4 色で十分という定理）がいい例だ。魔方陣の解がいくつ存在するかも計算しないとわからない [8)9)]。これなどは分かったからなんだ、計算する価値があるのかといわれるかもしれない。

それでも知りたい人はコンピュータを使って挑戦するであろう。

参考文献

1）The Cube - Introduction By Ernő Rubik，　Jerry Slocum et. al. 2009 ISBN-13 9781579128050

2）キューブパズル，秋山久義，株式会社新紀元社，2004，ISBN 4-775302841

3）ルービック・キューブと数学パズル，島内剛一，日本評論社，2008、ISBN 978-4-535-78537-3

4）" God's Number is 20"、http://cube20.org

5）ルービック・キューブの最小手数，数学セミナー，Vol.51 no.11、日本評論社，2010

6) "Pocket Cube", http://www.wikiwand.com/en/Pocket_Cube

7) 四色問題，一松信，講談社，2016，**ISBN-13: 978-4062579698**

8）新版魔方陣の世界，大森清美，日本評論社，2018

9)「ランダムサンプリングによる 6 次魔方 陣の総数の推定」, 大石弥幸，数芸パズル第 177 号 1992 年 4 月 http://www.daido-it.ac.jp/~oishi/TH5/magics6.pdf